Od maksimalno singularnih funkcija do fraktalnih bubnjeva

Darko Žubrinić

Fakultet elektrotehnike i računarstva (FER)
Sveučilišta u Zagrebu
Zavod za primijenjenu matematiku

Knjižnica HAZU, Zagreb
siječanj 2024.

Glavni ciljevi ovog predavanja

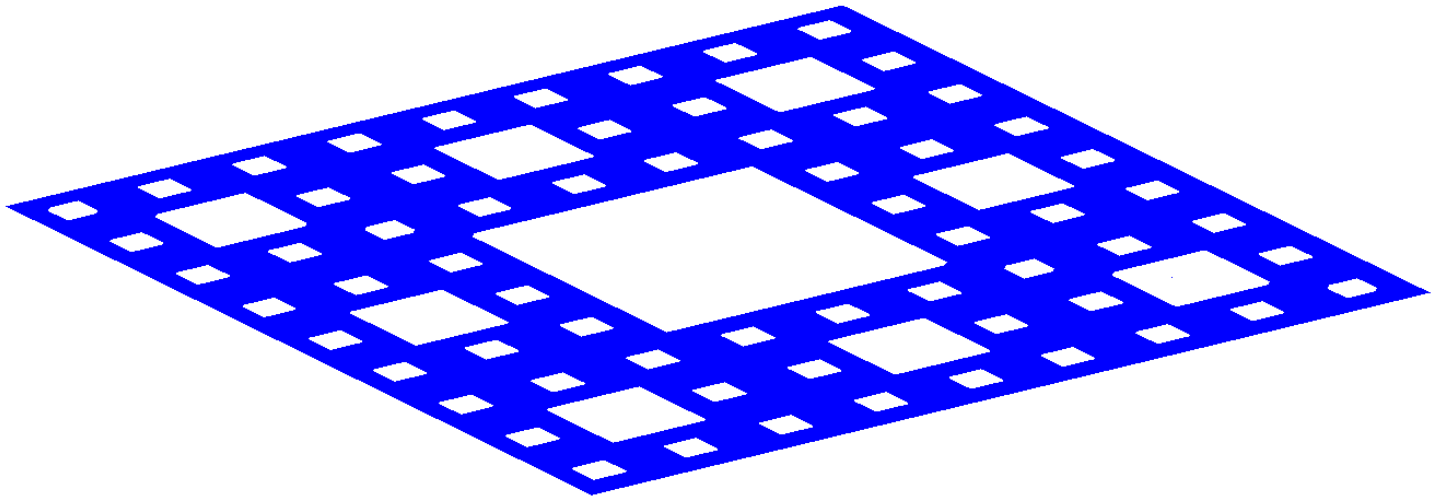
- uvesti pojam singularne dimenzije $\mathrm{s\text{-}dim}\, X$ za bilo koji zadani neprazni skup X realnih L-izmjerivih funkcija $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, gdje je Ω zadani otvoren podskup od $\mathbb{R}^N$; izračunati ga za neke X.

Glavni ciljevi ovog predavanja

- uvesti pojam singularne dimenzije $\mathrm{s\text{-}dim}\, X$ za bilo koji zadani neprazni skup X realnih L-izmjerivih funkcija $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, gdje je Ω zadani otvoren podskup od $\mathbb{R}^N$; izračunati ga za neke X.
- proširiti pojam kompleksnih dimenzija (u $\mathbb{C}$) s fraktalnih struna (Lapidus i van Frankenhuijsen 1996) na bilo koji kompaktan neprazan skup u $\mathbb{R}^N$ (Lapidus 2009.), te na još općenitije objekte – *relativne fraktalne bubnjeve* (RFDs).

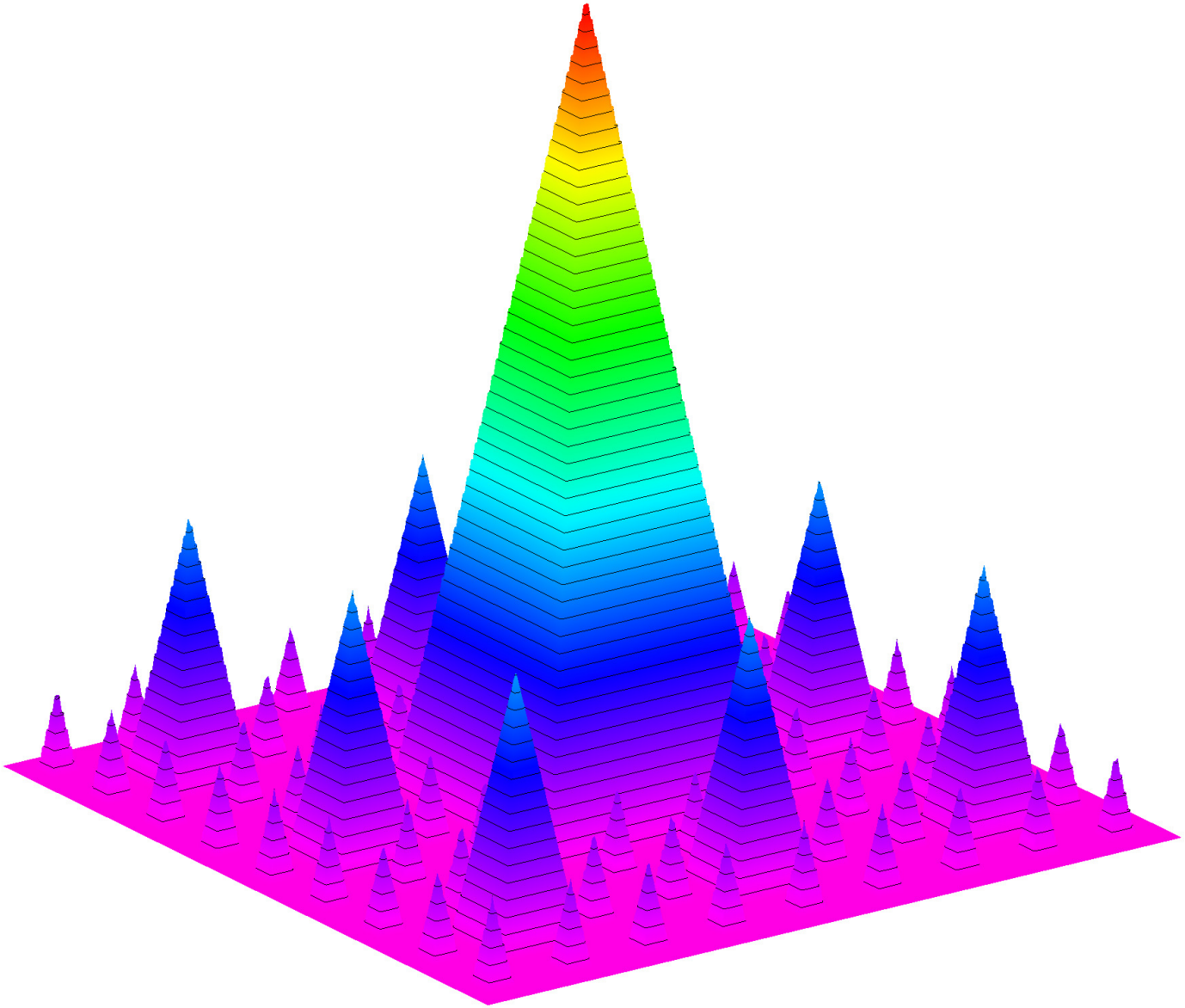
Glavni ciljevi ovog predavanja

- uvesti pojam singularne dimenzije $\mathrm{s\text{-}dim}\, X$ za bilo koji zadani neprazni skup X realnih L-izmjerivih funkcija $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, gdje je Ω zadani otvoren podskup od $\mathbb{R}^N$; izračunati ga za neke X.
- proširiti pojam kompleksnih dimenzija (u $\mathbb{C}$) s fraktalnih struna (Lapidus i van Frankenhuijsen 1996) na bilo koji kompaktan neprazan skup u $\mathbb{R}^N$ (Lapidus 2009.), te na još općenitije objekte – *relativne fraktalne bubnjeve* (RFDs).

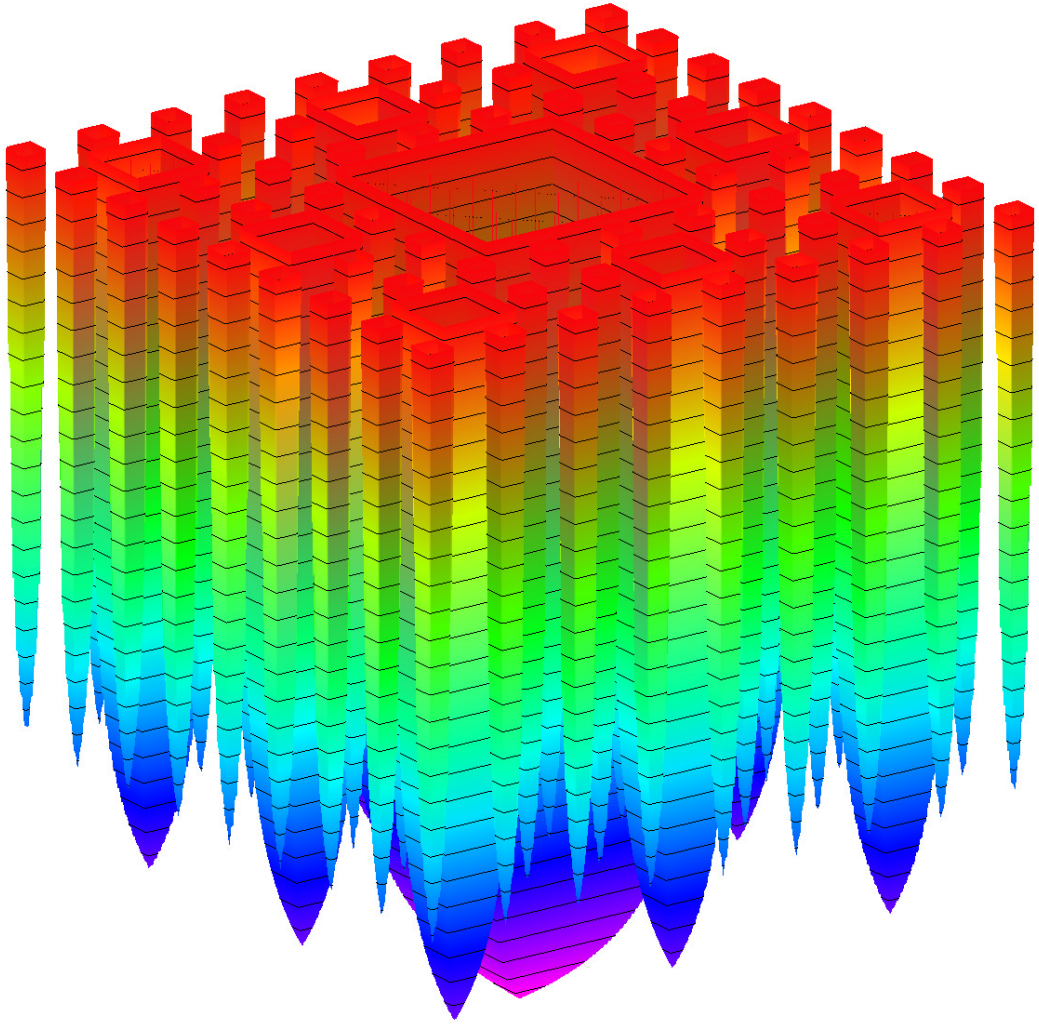


Primjer: $A =$ Sierpińskijev sag

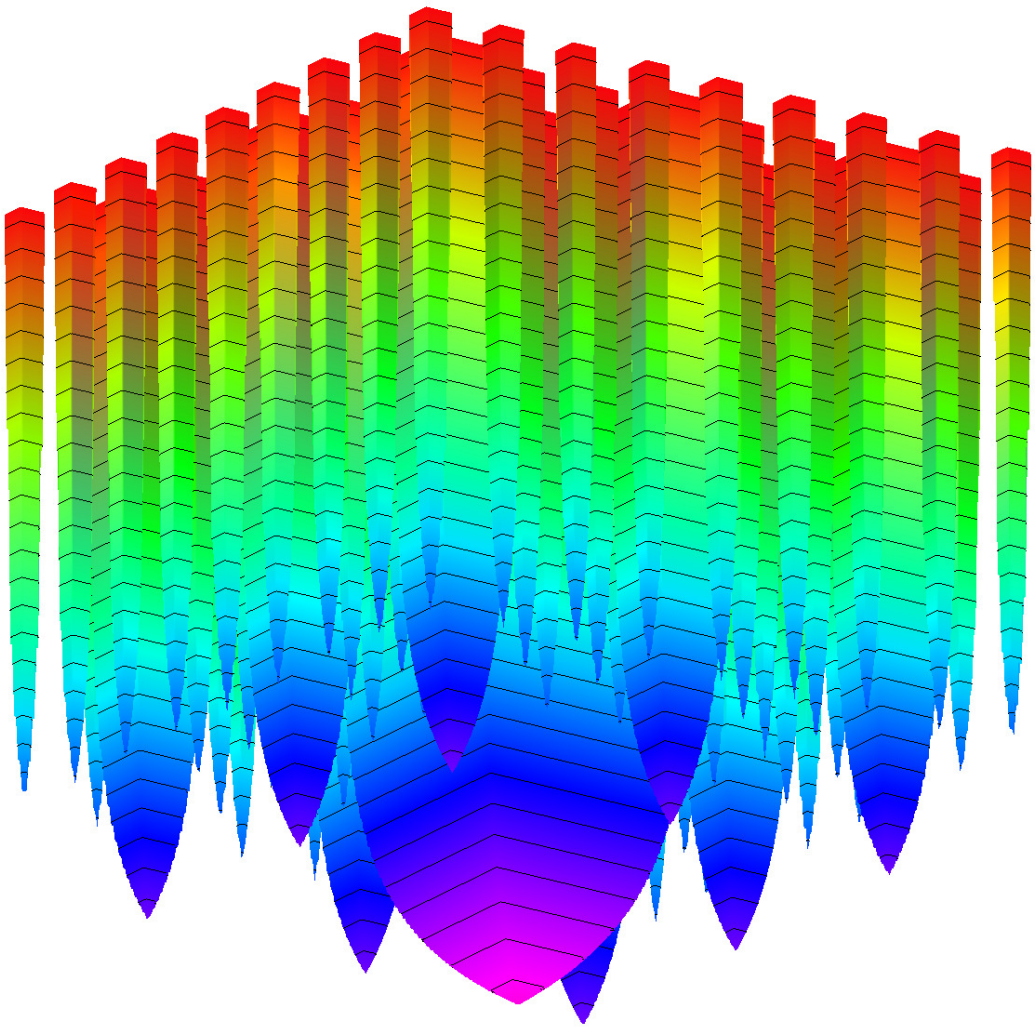
Graf funkcije $[0,1]^2 \ni x \mapsto d(x,A)$



Graf funkcije $[0,1]^2 \ni x \mapsto d(x,A)^{-\gamma}$, za $\gamma = const > 0$



Graf funkcije $[0,1]^2 \ni x \mapsto d(x,A)^{-\gamma}$, za $\gamma = const > 0$



Fraktalne dimenzije

Ključni pojmovi ([Kenneth Falconer], [Claude Tricot]):

- *Minkowskijev sadržaj* omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Minkowskijeva dimenzija* ili *box dimenzija* (gornja i dolnja) omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Hausdorffova dimenzija* skupa $A \subseteq \mathbb{R}^N$

Fraktalne dimenzije

Ključni pojmovi ([Kenneth Falconer], [Claude Tricot]):

- *Minkowskijev sadržaj* omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Minkowskijeva dimenzija* ili *box dimenzija* (gornja i dolnja) omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Hausdorffova dimenzija* skupa $A \subseteq \mathbb{R}^N$

Fraktalne dimenzije

Ključni pojmovi ([Kenneth Falconer], [Claude Tricot]):

- *Minkowskijev sadržaj* omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Minkowskijeva dimenzija* ili *box dimenzija* (gornja i dolnja) omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Hausdorffova dimenzija* skupa $A \subseteq \mathbb{R}^N$

Fraktalne dimenzije

Ključni pojmovi ([Kenneth Falconer], [Claude Tricot]):

- *Minkowskijev sadržaj* omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Minkowskijeva dimenzija* ili *box dimenzija* (gornja i dolnja) omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Hausdorffova dimenzija* skupa $A \subseteq \mathbb{R}^N$

Teorija oscilacija za ODJ i PDJ

- Mervan Pašić (JDE 2003.), D.Ž. (CRAS 2002.), Luka Korkut, Siniša Miličić

Fraktalne dimenzije

Ključni pojmovi ([Kenneth Falconer], [Claude Tricot]):

- *Minkowskijev sadržaj* omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Minkowskijeva dimenzija* ili *box dimenzija* (gornja i dolnja) omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Hausdorffova dimenzija* skupa $A \subseteq \mathbb{R}^N$

Teorija oscilacija za ODJ i PDJ

- Mervan Pašić (JDE 2003.), D.Ž. (CRAS 2002.), Luka Korkut, Siniša Miličić

Dinamički sustavi, Eulerove spirale, Fresnelovi integrali

- Vesna Županović, D.Ž., Lana Horvat Dmitrović, Maja Resman, Goran Radunović, Domagoj Vlah, Neven Elezović, Josipa-Pina Milišić
- Pavao Mardešić, Jean-Philippe Rolin, Renato Huzak

Fraktalne dimenzije

Ključni pojmovi ([Kenneth Falconer], [Claude Tricot]):

- *Minkowskijev sadržaj* omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Minkowskijeva dimenzija* ili *box dimenzija* (gornja i dolnja) omeđenog skupa $A \subset \mathbb{R}^N$
- *Hausdorffova dimenzija* skupa $A \subseteq \mathbb{R}^N$

Teorija oscilacija za ODJ i PDJ

- Mervan Pašić (JDE 2003.), D.Ž. (CRAS 2002.), Luka Korkut, Siniša Miličić

Dinamički sustavi, Eulerove spirale, Fresnelovi integrali

- Vesna Županović, D.Ž., Lana Horvat Dmitrović, Maja Resman, Goran Radunović, Domagoj Vlah, Neven Elezović, Josipa-Pina Milišić
- Pavao Mardešić, Jean-Philippe Rolin, Renato Huzak

Fraktalne strune, fraktalni bubnjevi i njihove zeta funkcije

- Michel L. Lapidus, D.Ž., Goran Radunović

1. dio

Singularna dimenzija

Ključne riječi:
box (ili Minkowskijeva) dimenzija, Hausdorffova dimenzija, singularni skup Lebesgueove funkcije, maksimalno singularna funkcija, generalizirani Cantorov skup, Cantorov ražanj

Singularna dimenzija

Singulariteti funkcija Soboljeva (od 1950ih):

Deny i Lions, Fuglede, Ziemer, Calderón, Rešetnyak, Serrin, Stein, Adams i Hedberg, Jaffard i Meyer, Grillot, Kilpeläinen

Singularnu dimenziju skupa X definiramo kao (Ž CRAS 2002.):

$$\text{s-dim}\, X \stackrel{def}{=} \sup\{\dim_H(\operatorname{Sing} \mathrm{u}) : u \in X\} \ \in [0, N]$$

Za funkciju $v \in X$ kažemo da je *maksimalno singularna* u X, ako se supremum dostiže na toj funkciji, tj.

$$\dim_H(\operatorname{Sing} v) = \text{s-dim}\, X$$

Singularna dimenzija

Singulariteti funkcija Soboljeva (od 1950ih):

Deny i Lions, Fuglede, Ziemer, Calderón, Rešetnyak, Serrin, Stein, Adams i Hedberg, Jaffard i Meyer, Grillot, Kilpeläinen

$\Omega \subseteq R^N$ otvoren skup (ponekad i omeđen)

Singularnu dimenziju skupa X definiramo kao (Ž CRAS 2002.):

$$\text{s-dim}\, X \stackrel{def}{=} \sup\{\dim_H(\operatorname{Sing} u) : u \in X\} \ \in [0, N]$$

Za funkciju $v \in X$ kažemo da je *maksimalno singularna* u X, ako se supremum dostiže na toj funkciji, tj.

$$\dim_H(\operatorname{Sing} v) = \text{s-dim}\, X$$

Singularna dimenzija

Singulariteti funkcija Soboljeva (od 1950ih):

Deny i Lions, Fuglede, Ziemer, Calderón, Rešetnyak, Serrin, Stein, Adams i Hedberg, Jaffard i Meyer, Grillot, Kilpeläinen

$\Omega \subseteq R^N$ otvoren skup (ponekad i omeđen)

$X = X(\Omega) \subseteq \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : f$ je Lebesgue-izmjeriva$\}$

Singularnu dimenziju skupa X definiramo kao (Ž CRAS 2002.):

$$\text{s-dim}\, X \stackrel{def}{=} \sup\{\dim_H(\operatorname{Sing} u) : u \in X\} \ \in [0, N]$$

Za funkciju $v \in X$ kažemo da je *maksimalno singularna* u X, ako se supremum dostiže na toj funkciji, tj.

$$\dim_H(\operatorname{Sing} v) = \text{s-dim}\, X$$

Singularna dimenzija

Singulariteti funkcija Soboljeva (od 1950ih):

Deny i Lions, Fuglede, Ziemer, Calderón, Rešetnyak, Serrin, Stein, Adams i Hedberg, Jaffard i Meyer, Grillot, Kilpeläinen

$\Omega \subseteq R^N$ otvoren skup (ponekad i omeđen)

$X = X(\Omega) \subseteq \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : f$ je Lebesgue-izmjeriva$\}$

Za svaki $u \in X$ definiramo *singularni skup* funkcije $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ kao

$$\operatorname{Sing} u \stackrel{def}{=} \left\{ a \in \Omega : \exists r, \gamma, C > 0 \;\; u(x) \geq \frac{C}{|x-a|^\gamma} \text{ s.s. u } B_r(a) \right\}$$

Singularnu dimenziju skupa X definiramo kao (Ž CRAS 2002.):

$$\text{s-dim}\, X \stackrel{def}{=} \sup\{\dim_H(\operatorname{Sing} \mathrm{u}) : u \in X\} \;\in\; [0, N]$$

Za funkciju $v \in X$ kažemo da je *maksimalno singularna* u X, ako se supremum dostiže na toj funkciji, tj.

$$\dim_H(\operatorname{Sing} v) = \text{s-dim}\, X$$

Singularna dimenzija

Singulariteti funkcija Soboljeva (od 1950ih):

Deny i Lions, Fuglede, Ziemer, Calderón, Rešetnyak, Serrin, Stein, Adams i Hedberg, Jaffard i Meyer, Grillot, Kilpeläinen

$\Omega \subseteq R^N$ otvoren skup (ponekad i omeđen)

$X = X(\Omega) \subseteq \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : f$ je Lebesgue-izmjeriva$\}$

Za svaki $u \in X$ definiramo *singularni skup* funkcije $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ kao

$$\text{Sing}\, u \stackrel{def}{=} \left\{ a \in \Omega : \exists r, \gamma, C > 0 \;\; u(x) \geq \frac{C}{|x-a|^\gamma} \text{ s.s. u } B_r(a) \right\}$$

Singularnu dimenziju skupa X definiramo kao (Ž CRAS 2002.):

$$\text{s-dim}\, X \stackrel{def}{=} \sup\{\dim_H(\text{Sing u}) : u \in X\} \;\in\; [0, N]$$

Za funkciju $v \in X$ kažemo da je *maksimalno singularna* u X, ako se supremum dostiže na toj funkciji, tj.

$$\dim_H(\text{Sing}\, v) = \text{s-dim}\, X$$

Singularna dimenzija

Singulariteti funkcija Soboljeva (od 1950ih):

Deny i Lions, Fuglede, Ziemer, Calderón, Rešetnyak, Serrin, Stein, Adams i Hedberg, Jaffard i Meyer, Grillot, Kilpeläinen

$\Omega \subseteq R^N$ otvoren skup (ponekad i omeđen)

$X = X(\Omega) \subseteq \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : f$ je Lebesgue-izmjeriva$\}$

Za svaki $u \in X$ definiramo *singularni skup* funkcije $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ kao

$$\operatorname{Sing} u \stackrel{def}{=} \left\{ a \in \Omega : \exists r, \gamma, C > 0 \;\; u(x) \geq \frac{C}{|x-a|^\gamma} \text{ s.s. u } B_r(a) \right\}$$

Singularnu dimenziju skupa X definiramo kao (Ž CRAS 2002.):

$$\text{s-dim}\, X \stackrel{def}{=} \sup\{\dim_H(\operatorname{Sing} \mathrm{u}) : u \in X\} \;\in\; [0, N]$$

Za funkciju $v \in X$ kažemo da je *maksimalno singularna* u X, ako se supremum dostiže na toj funkciji, tj.

$$\dim_H(\operatorname{Sing} v) = \text{s-dim}\, X$$

Singularna dimenzija

Singulariteti funkcija Soboljeva (od 1950ih):

Deny i Lions, Fuglede, Ziemer, Calderón, Rešetnyak, Serrin, Stein, Adams i Hedberg, Jaffard i Meyer, Grillot, Kilpeläinen

$\Omega \subseteq R^N$ otvoren skup (ponekad i omeđen)

$X = X(\Omega) \subseteq \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : f$ je Lebesgue-izmjeriva$\}$

Za svaki $u \in X$ definiramo *singularni skup* funkcije $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ kao

$$\text{Sing}\, u \stackrel{def}{=} \left\{ a \in \Omega : \exists r, \gamma, C > 0 \;\; u(x) \geq \frac{C}{|x-a|^\gamma} \text{ s.s. u } B_r(a) \right\}$$

Singularnu dimenziju skupa X definiramo kao (Ž CRAS 2002.):

$$\text{s-dim}\, X \stackrel{def}{=} \sup\{\dim_H(\text{Sing u}) : u \in X\} \;\in\; [0, N]$$

Za funkciju $v \in X$ kažemo da je *maksimalno singularna* u X, ako se supremum dostiže na toj funkciji, tj.

$$\dim_H(\text{Sing}\, v) = \text{s-dim}\, X$$

Svojstva Hausdorffove i Minkowskijeve (box) dimenzije

Za svaki neprazan i omeđen skup A u $\mathbb{R}^N$ je

$$0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$$

Svojstva Hausdorffove i Minkowskijeve (box) dimenzije

Za svaki neprazan i omeđen skup A u $\mathbb{R}^N$ je

$$0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$$

Hausdorffova dimenzija je prebrojivo stabilna, tj. za svaku prebrojivu familiju napraznih podskupova $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{R}^N$ vrijedi

$$\dim_H \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sup_k (\dim_H A_k)$$

Svojstva Hausdorffove i Minkowskijeve (box) dimenzije

Za svaki neprazan i omeđen skup A u $\mathbb{R}^N$ je

$$0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$$

Hausdorffova dimenzija je prebrojivo stabilna, tj. za svaku prebrojivu familiju napraznih podskupova $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{R}^N$ vrijedi

$$\dim_H \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sup_k (\dim_H A_k)$$

Gornja box-dimenzija je konačno stabilna, tj. za svaka dva omeđena skupa A_1 i A_2 je $\overline{\dim}_B(A_1 \cup A_2) = \max\{\overline{\dim}_B A_1, \overline{\dim}_B A_2\}$.

Svojstva Hausdorffove i Minkowskijeve (box) dimenzije

Za svaki neprazan i omeđen skup A u $\mathbb{R}^N$ je

$$0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$$

Hausdorffova dimenzija je prebrojivo stabilna, tj. za svaku prebrojivu familiju napraznih podskupova $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{R}^N$ vrijedi

$$\dim_H \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sup_k (\dim_H A_k)$$

Gornja box-dimenzija je konačno stabilna, tj. za svaka dva omeđena skupa A_1 i A_2 je $\overline{\dim}_B(A_1 \cup A_2) = \max\{\overline{\dim}_B A_1, \overline{\dim}_B A_2\}$.

Dolnja box-dimenzija nije konačno stabilna. Također, za svaki omeđen skup A je $\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A)$.

Svojstva Hausdorffove i Minkowskijeve (box) dimenzije

Za svaki neprazan i omeđen skup A u $\mathbb{R}^N$ je

$$0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$$

Hausdorffova dimenzija je prebrojivo stabilna, tj. za svaku prebrojivu familiju napraznih podskupova $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{R}^N$ vrijedi

$$\dim_H \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sup_k (\dim_H A_k)$$

Gornja box-dimenzija je konačno stabilna, tj. za svaka dva omeđena skupa A_1 i A_2 je $\overline{\dim}_B(A_1 \cup A_2) = \max\{\overline{\dim}_B A_1, \overline{\dim}_B A_2\}$.

Dolnja box-dimenzija nije konačno stabilna. Također, za svaki omeđen skup A je $\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A)$.

Ako je $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A$, zajedničku vrijednost pišemo kao $\dim_B A$.

Svojstva Hausdorffove i Minkowskijeve (box) dimenzije

Za svaki neprazan i omeđen skup A u $\mathbb{R}^N$ je

$$0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$$

Hausdorffova dimenzija je prebrojivo stabilna, tj. za svaku prebrojivu familiju napraznih podskupova $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{R}^N$ vrijedi

$$\dim_H \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sup_k (\dim_H A_k)$$

Gornja box-dimenzija je konačno stabilna, tj. za svaka dva omeđena skupa A_1 i A_2 je $\overline{\dim}_B(A_1 \cup A_2) = \max\{\overline{\dim}_B A_1, \overline{\dim}_B A_2\}$.

Dolnja box-dimenzija nije konačno stabilna. Također, za svaki omeđen skup A je $\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A)$.

Ako je $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A$, zajedničku vrijednost pišemo kao $\dim_B A$.

Za $t > 0$ neka je $A_t := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A) < t\}$ (t-okoliš od A).

Svojstva Hausdorffove i Minkowskijeve (box) dimenzije

Za svaki neprazan i omeđen skup A u $\mathbb{R}^N$ je

$$0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$$

Hausdorffova dimenzija je prebrojivo stabilna, tj. za svaku prebrojivu familiju napraznih podskupova $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{R}^N$ vrijedi

$$\dim_H \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sup_k (\dim_H A_k)$$

Gornja box-dimenzija je konačno stabilna, tj. za svaka dva omeđena skupa A_1 i A_2 je $\overline{\dim}_B(A_1 \cup A_2) = \max\{\overline{\dim}_B A_1, \overline{\dim}_B A_2\}$.

Dolnja box-dimenzija nije konačno stabilna. Također, za svaki omeđen skup A je $\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A)$.

Ako je $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A$, zajedničku vrijednost pišemo kao $\dim_B A$.

Za $t > 0$ neka je $A_t := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A) < t\}$ (t-okoliš od A).

Ako $|A_t| \asymp t^\sigma$ kad $t \to 0^+$, onda je $\dim_B A = N - \sigma$.

Svojstva Hausdorffove i Minkowskijeve (box) dimenzije

Za svaki neprazan i omeđen skup A u $\mathbb{R}^N$ je

$$0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$$

Hausdorffova dimenzija je prebrojivo stabilna, tj. za svaku prebrojivu familiju napraznih podskupova $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{R}^N$ vrijedi

$$\dim_H \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sup_k (\dim_H A_k)$$

Gornja box-dimenzija je konačno stabilna, tj. za svaka dva omeđena skupa A_1 i A_2 je $\overline{\dim}_B(A_1 \cup A_2) = \max\{\overline{\dim}_B A_1, \overline{\dim}_B A_2\}$.

Dolnja box-dimenzija nije konačno stabilna. Također, za svaki omeđen skup A je $\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A)$.

Ako je $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A$, zajedničku vrijednost pišemo kao $\dim_B A$.

Za $t > 0$ neka je $A_t := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A) < t\}$ (t-okoliš od A).

Ako $|A_t| \asymp t^\sigma$ kad $t \to 0^+$, onda je $\dim_B A = N - \sigma$.

Paralelno rabimo i $\dim_H$ i $\dim_B$.

Zašto u definiciji s-dim X rabimo $\dim_H$, a ne $\overline{\dim}_B$?

Inače bi $\text{s-dim}\, X$ bila praktički uvijek trivijalna, tj. ili 0 ili N.

Zašto u definiciji s-dim X rabimo $\dim_H$, a ne $\overline{\dim}_B$?

Inače bi $\text{s-dim}\, X$ bila praktički uvijek trivijalna, tj. ili 0 ili N.

Primjer. Neka je X Banachov prostor funkcija (na primjer, $X = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ za $kp < N$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, funkcija u X sa samo jednim singularitetom, i to u 0.

Zašto u definiciji s-dim X rabimo $\dim_H$, a ne $\overline{\dim}_B$?

Inače bi $\text{s-dim}\, X$ bila praktički uvijek trivijalna, tj. ili 0 ili N.

Primjer. Neka je X Banachov prostor funkcija (na primjer, $X = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ za $kp < N$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, funkcija u X sa samo jednim singularitetom, i to u 0.

Neka je $A = \{a_k : k \geq 1\}$ prebrojiv gust skup u nekom zadanom omeđenom otv. skupu $V \subset \mathbb{R}^N$. Tada su $f(\cdot - a_k) \in X$ za sve k. Onda za $u \in X$,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(x - a_k)$$

vrijedi $\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Sing}\, u) = \overline{V}$ (Steinov trik, Elias Stein). Pritom je

Zašto u definiciji s-dim X rabimo $\dim_H$, a ne $\overline{\dim}_B$?

Inače bi $\text{s-dim}\, X$ bila praktički uvijek trivijalna, tj. ili 0 ili N.

Primjer. Neka je X Banachov prostor funkcija (na primjer, $X = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ za $kp < N$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, funkcija u X sa samo jednim singularitetom, i to u 0.

Neka je $A = \{a_k : k \geq 1\}$ prebrojiv gust skup u nekom zadanom omeđenom otv. skupu $V \subset \mathbb{R}^N$. Tada su $f(\cdot - a_k) \in X$ za sve k. Onda za $u \in X$,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(x - a_k)$$

vrijedi $\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Sing}\, u) = \overline{V}$ (Steinov trik, Elias Stein). Pritom je

$$\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A) = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, V) = N$$

Zašto u definiciji s-dim X rabimo $\dim_H$, a ne $\overline{\dim}_B$?

Inače bi $\text{s-dim}\, X$ bila praktički uvijek trivijalna, tj. ili 0 ili N.

Primjer. Neka je X Banachov prostor funkcija (na primjer, $X = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ za $kp < N$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, funkcija u X sa samo jednim singularitetom, i to u 0.

Neka je $A = \{a_k : k \geq 1\}$ prebrojiv gust skup u nekom zadanom omeđenom otv. skupu $V \subset \mathbb{R}^N$. Tada su $f(\cdot - a_k) \in X$ za sve k. Onda za $u \in X$,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(x - a_k)$$

vrijedi $\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Sing}\, u) = \overline{V}$ (Steinov trik, Elias Stein). Pritom je

$$\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A) = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, V) = N$$

Znači, kad bi definicija $\text{s-dim}\, X$ rabila $\overline{\dim}_B$, bilo bi $\text{s-dim}\, X = N$.

Zašto u definiciji s-dim X rabimo $\dim_H$, a ne $\overline{\dim}_B$?

Inače bi $\text{s-dim}\, X$ bila praktički uvijek trivijalna, tj. ili 0 ili N.

Primjer. Neka je X Banachov prostor funkcija (na primjer, $X = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ za $kp < N$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, funkcija u X sa samo jednim singularitetom, i to u 0.

Neka je $A = \{a_k : k \geq 1\}$ prebrojiv gust skup u nekom zadanom omeđenom otv. skupu $V \subset \mathbb{R}^N$. Tada su $f(\cdot - a_k) \in X$ za sve k. Onda za $u \in X$,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(x - a_k)$$

vrijedi $\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Sing}\, u) = \overline{V}$ (Steinov trik, Elias Stein). Pritom je

$$\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A) = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, V) = N$$

Znači, kad bi definicija $\text{s-dim}\, X$ rabila $\overline{\dim}_B$, bilo bi $\text{s-dim}\, X = N$.

OP. Kako vizualizirati graf funkcije $u|_V$?

Zašto u definiciji s-dim X rabimo $\dim_H$, a ne $\overline{\dim}_B$?

Inače bi $\text{s-dim}\, X$ bila praktički uvijek trivijalna, tj. ili 0 ili N.

Primjer. Neka je X Banachov prostor funkcija (na primjer, $X = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ za $kp < N$, $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, funkcija u X sa samo jednim singularitetom, i to u 0.

Neka je $A = \{a_k : k \geq 1\}$ prebrojiv gust skup u nekom zadanom omeđenom otv. skupu $V \subset \mathbb{R}^N$. Tada su $f(\cdot - a_k) \in X$ za sve k. Onda za $u \in X$,

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(x - a_k)$$

vrijedi $\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Sing}\, u) = \overline{V}$ (Steinov trik, Elias Stein). Pritom je

$$\overline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, A) = \overline{\dim}_B(\mathrm{Cl}\, V) = N$$

Znači, kad bi definicija $\text{s-dim}\, X$ rabila $\overline{\dim}_B$, bilo bi $\text{s-dim}\, X = N$.

OP. Kako vizualizirati graf funkcije $u|_V$?

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

U svim slučajevima (osim u zadnjem) znamo da maksimalno singularne funkcije sigurno postoje u prostoru X.

Rezultati

Ž. 2002.–2006. (5 članaka: CRAS, JMAA, RMJM, AdM, MIA)

- s-dim $L^p(\Omega) = N$, za sve $p \geq 1$
- s-dim $W^{k,p}(\Omega) = (N - kp)_+$, za $p > 1$ i $k \in \mathbb{N}$; OP. $p = 1$;
- s-dim $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besselovog potencijala, $\alpha > 0$, $p > 1$); OP. $p = 1$;
  vrijedi $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = L^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ (Calderón)
- s-dim $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Besova, $p, q > 1$, $\alpha > 0$)
- s-dim $F^{p,q}_\alpha(\mathbb{R}^N) = (N - \alpha p)_+$ (prostori Lizorkin-Triebela)
- s-dim $H^1(\mathbb{R}^N) = N$ (prostori Hardyja)
- s-dim $\{u \in H^1_0(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\} = (N - 4)_+$
- s-dim $\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : \exists F \in L^{p'}(\Omega) \ -\Delta_p u = F(x)\} = (N - pp')_+$ za $p > 2$ (X nije vektorski prostor za $p \neq 2$)

U svim slučajevima (osim u zadnjem) znamo da maksimalno singularne funkcije sigurno postoje u prostoru X.

OP. Ima li p-Laplaceova jednadžba maksimalno singularno rješenje?

Geometrija skupa maksimalno singularnih funkcija u Banachovom prostoru X

U pravilu, ako je X Banachov prostor funkcija, te ako posjeduje barem jednu maksimalno singularnu funkciju v, onda je *skup svih maksimalno singularnih funkcija* gust u X.

Geometrija skupa maksimalno singularnih funkcija u Banachovom prostoru X

U pravilu, ako je X Banachov prostor funkcija, te ako posjeduje barem jednu maksimalno singularnu funkciju v, onda je *skup svih maksimalno singularnih funkcija* gust u X.

Dokaz. Ako je $\varphi \in X$ neprekinuta i $\varepsilon > 0$, onda je $\varphi + \varepsilon\, v$ također maksimalno singularna, jer $\operatorname{Sing} v = \operatorname{Sing}(\varphi + \varepsilon\, v)$. Pretpostavka je da funkcije iz X koje su neprekinute, čine gust skup u X.

Geometrija skupa maksimalno singularnih funkcija u Banachovom prostoru X

U pravilu, ako je X Banachov prostor funkcija, te ako posjeduje barem jednu maksimalno singularnu funkciju v, onda je *skup svih maksimalno singularnih funkcija* gust u X.

Dokaz. Ako je $\varphi \in X$ neprekinuta i $\varepsilon > 0$, onda je $\varphi + \varepsilon\, v$ također maksimalno singularna, jer $\operatorname{Sing} v = \operatorname{Sing}(\varphi + \varepsilon\, v)$. Pretpostavka je da funkcije iz X koje su neprekinute, čine gust skup u X.

Ako je skup $X^+_{\max}$ svih nenegativnih maximalno singularnih funkcija neprazan, onda je on konveksan konus u Banachovom prostoru X: za bilo koje $\lambda_{1,2} > 0$ i $u_{1,2} \in X^+_{\max}$ je $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in X^+_{\max}$.

Geometrija skupa maksimalno singularnih funkcija u Banachovom prostoru X

U pravilu, ako je X Banachov prostor funkcija, te ako posjeduje barem jednu maksimalno singularnu funkciju v, onda je *skup svih maksimalno singularnih funkcija* gust u X.

Dokaz. Ako je $\varphi \in X$ neprekinuta i $\varepsilon > 0$, onda je $\varphi + \varepsilon\, v$ također maksimalno singularna, jer $\operatorname{Sing} v = \operatorname{Sing}(\varphi + \varepsilon\, v)$. Pretpostavka je da funkcije iz X koje su neprekinute, čine gust skup u X.

Ako je skup $X^+_{\max}$ svih nenegativnih maximalno singularnih funkcija neprazan, onda je on konveksan konus u Banachovom prostoru X: za bilo koje $\lambda_{1,2} > 0$ i $u_{1,2} \in X^+_{\max}$ je $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in X^+_{\max}$.

OP. Neka je X neki (tipičan) Banachov prostor funkcija, koji ima barem jednu maksimalno singularnu funkciju. Neka je $X_{\max}$ skup svih maksimalno singularnih funkcija u X. Je li $X_{\max}$ skup prve ili druge kategorije (u smislu Bairea) u X?

Zahvale

- **Dragiša Mitrović** – iskustvo u pripremi naše knjige *Fundamentals of Applied Functional Analysis*, 1998.
- **Mervan Pašić** – uveo me u fraktalnu analizu, informacija o vrlo značajnim knjigama Kennetha Falconera i Claudea Tricota

Zahvale

- **Dragiša Mitrović** – iskustvo u pripremi naše knjige *Fundamentals of Applied Functional Analysis*, 1998.
- **Mervan Pašić** – uveo me u fraktalnu analizu, informacija o vrlo značajnim knjigama Kennetha Falconera i Claudea Tricota
- **Hrvoje Šikić** – informacija o integralnim reprezentacijama funkcija u prostorima Besova $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ i Lizorkin-Triebela $F_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^N)$
- **Patrizia Pucci** – priopćila teorem J. Simona o regularnosti rješenja p-Laplaceove jednadžbe $-\Delta_p u = F(x)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ za $p > 2$, s desnom stranom $F \in L^{p'}(\Omega)$ - rješenje je u prostoru Besova, točnije, $u \in B_{p',loc}^{p,\infty}(\Omega)$ (1977., Paris, Thése)

Zahvale

- **Dragiša Mitrović** – iskustvo u pripremi naše knjige *Fundamentals of Applied Functional Analysis*, 1998.
- **Mervan Pašić** – uveo me u fraktalnu analizu, informacija o vrlo značajnim knjigama Kennetha Falconera i Claudea Tricota
- **Hrvoje Šikić** – informacija o integralnim reprezentacijama funkcija u prostorima Besova $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^N)$ i Lizorkin-Triebela $F_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^N)$
- **Patrizia Pucci** – priopćila teorem J. Simona o regularnosti rješenja p-Laplaceove jednadžbe $-\Delta_p u = F(x)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ za $p > 2$, s desnom stranom $F \in L^{p'}(\Omega)$ - rješenje je u prostoru Besova, točnije, $u \in B_{p',loc}^{p,\infty}(\Omega)$ (1977., Paris, Thése)
- **Vesna Županović** (od 2003.) – plodna suradnji u fraktalnoj analizi dinamičkih sustava (14 radova sa D.Ž. et al.)
- **Michel Lapidus** (od 2009.) – intenzivna suradnju u proučavanju fraktalnih zeta funkcija (11 radova sa D.Ž., 10 od njih i s G. Radunovićem)

s-dim $L^p(\alpha, \beta) = 1$, za $1 \leq p < \infty$

$C^{(a)}$ = *generalizirani Cantorov skup* za $a \in (0, 1/2)$:
iz $[0, 1]$ vadimo srednji otvoren interval širine $1 - 2a$, preostala dva intervala su širine a svaki. (Za standardni Cantorov skup je $a = 1/3$.)

s-dim $L^p(\alpha, \beta) = 1$, za $1 \leq p < \infty$

$C^{(a)}$ = *generalizirani Cantorov skup* za $a \in (0, 1/2)$:
iz $[0, 1]$ vadimo srednji otvoren interval širine $1 - 2a$, preostala dva intervala su širine a svaki. (Za standardni Cantorov skup je $a = 1/3$.)
Vrijedi $\dim_H C^{(a)} = \dim_B C^{(a)} = \log_{1/a} 2$. (Falconner)

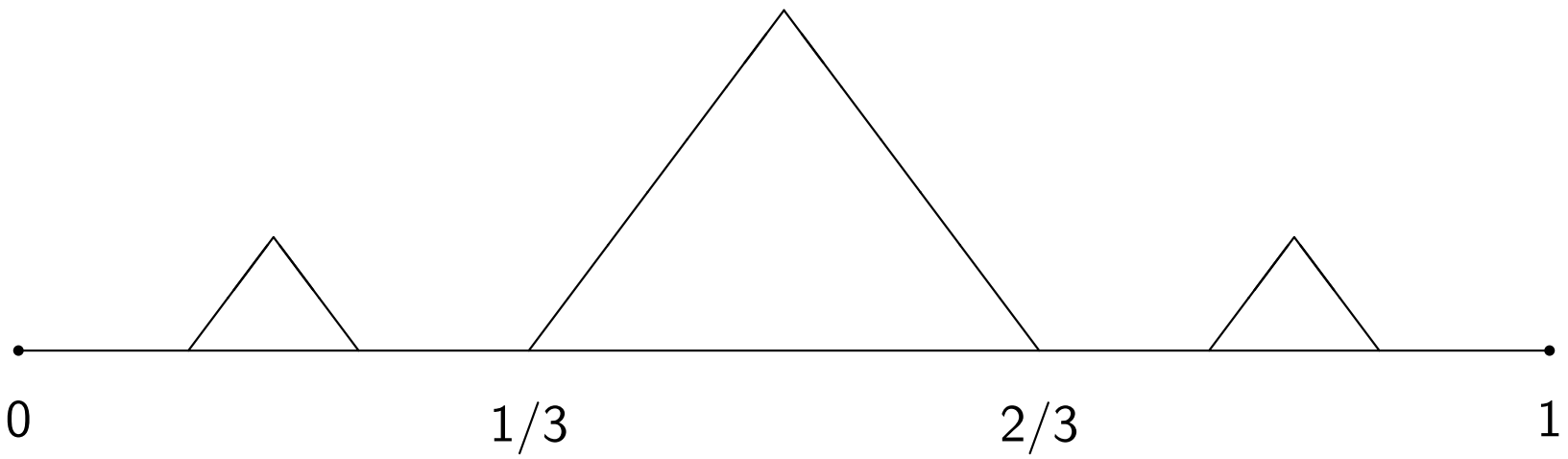
s-dim $L^p(\alpha, \beta) = 1$, za $1 \leq p < \infty$

$C^{(a)}$ = *generalizirani Cantorov skup* za $a \in (0, 1/2)$:
iz $[0, 1]$ vadimo srednji otvoren interval širine $1 - 2a$, preostala dva intervala su širine a svaki. (Za standardni Cantorov skup je $a = 1/3$.)
Vrijedi $\dim_H C^{(a)} = \dim_B C^{(a)} = \log_{1/a} 2$. (Falconner)
Obje dimenzije teže k 1 kad $a \to 1/2$.

s-dim $L^p(\alpha, \beta) = 1$, za $1 \leq p < \infty$

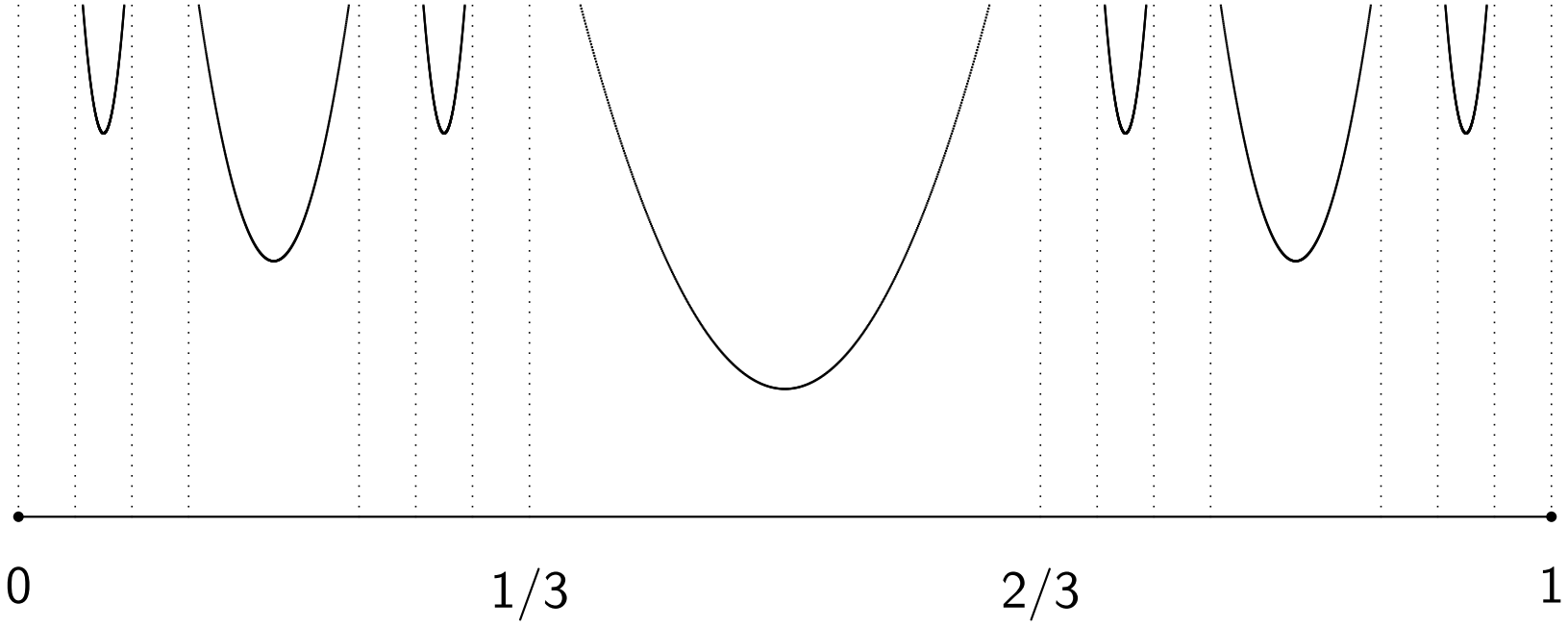
$C^{(a)}$ = *generalizirani Cantorov skup* za $a \in (0, 1/2)$:
iz $[0, 1]$ vadimo srednji otvoren interval širine $1 - 2a$, preostala dva intervala su širine a svaki. (Za standardni Cantorov skup je $a = 1/3$.)
Vrijedi $\dim_H C^{(a)} = \dim_B C^{(a)} = \log_{1/a} 2$. (Falconner)
Obje dimenzije teže k 1 kad $a \to 1/2$.

Graf funkcije $d(x, A)$ za standardni Cantorov skup A:



Slika: Graf funkcije $x \mapsto d(x, A)$, gdje je $A = C^{(1/3)}$ ternarni Cantorov skup. Prikazane su samo prve dvije generacije šatora grafa.

Graf funkcije $d(x, A)^{-\gamma}$ za Cantorov skup $A = C^{(1/3)}$

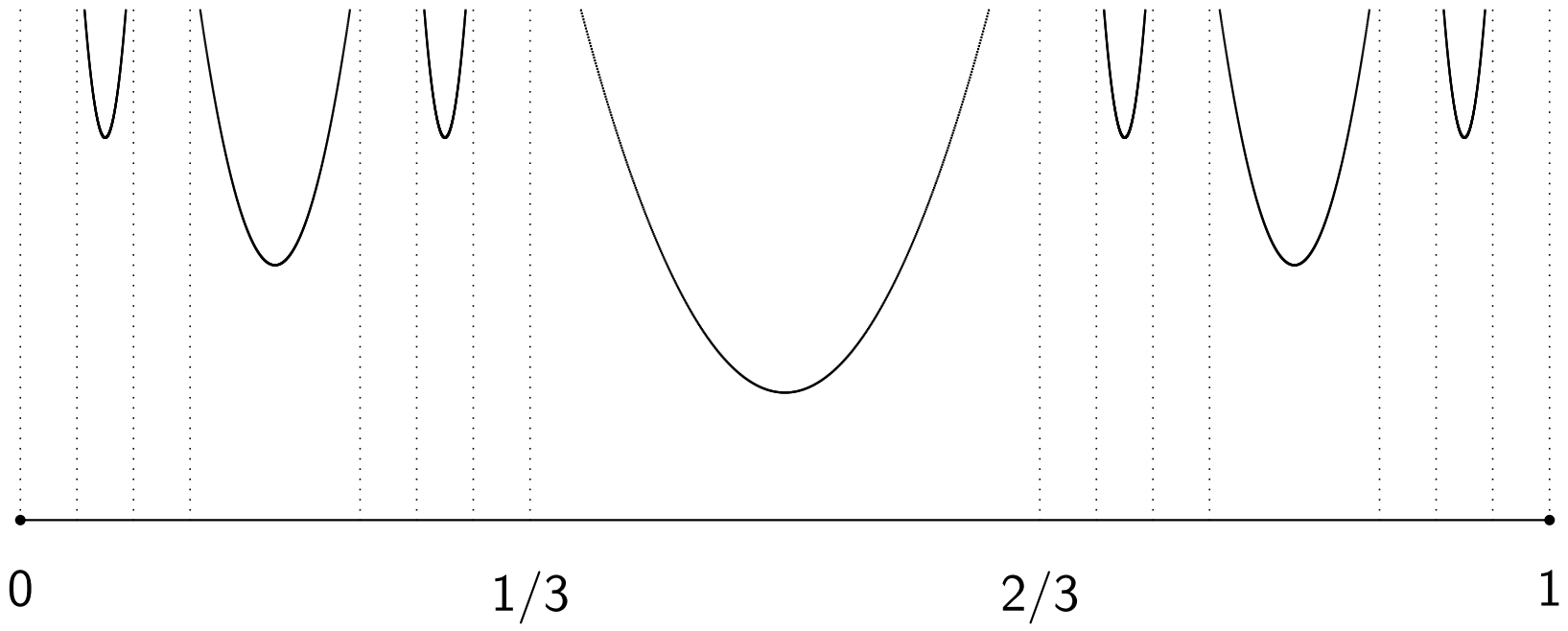


Slika: Za ternarni Cantorov skup $A = C^{(1/3)}$ vrijedi

$$\int_0^1 d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma < 1 - \log_3 2$$

Za $\gamma > 0$, njen graf ima prebrojivo mnogo povezanih komponenata (sve su neomeđene) i neprebrojivo mnogo vertikalnih asimptota.

Graf funkcije $d(x, A)^{-\gamma}$ za Cantorov skup $A = C^{(1/3)}$



Slika: Za ternarni Cantorov skup $A = C^{(1/3)}$ vrijedi

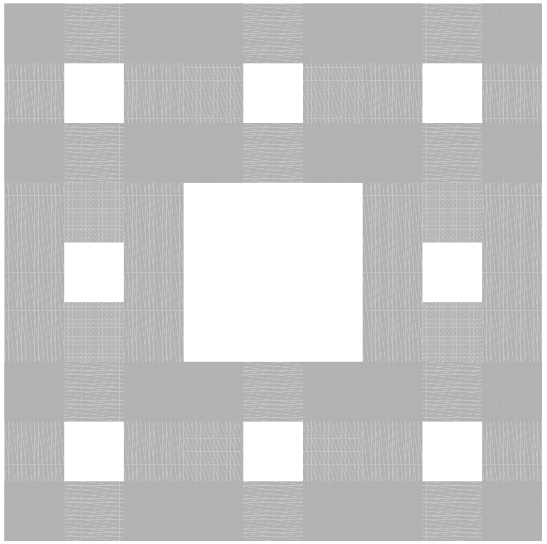
$$\int_0^1 d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma < 1 - \log_3 2$$

Za $\gamma > 0$, njen graf ima prebrojivo mnogo povezanih komponenata (sve su neomeđene) i neprebrojivo mnogo vertikalnih asimptota.

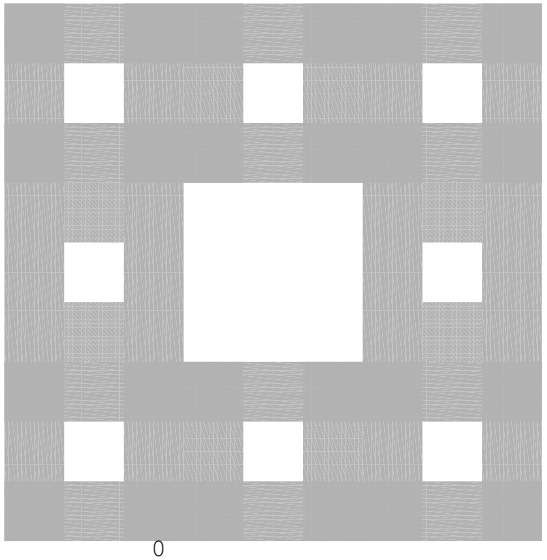
Općenitije, za bilo koji generalizirani Cantorov skup $A = C^{(a)}$:

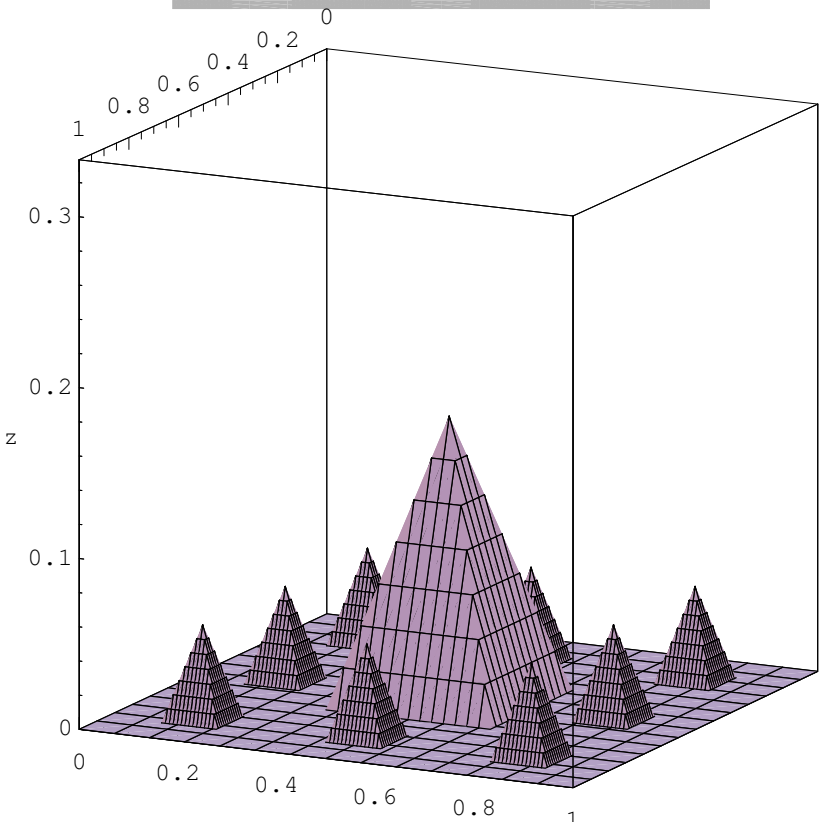
$$\int_0^1 d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma < 1 - \log_{1/a} 2$$

Sierpińskijev sag A i graf funkcije $d(x, A)$

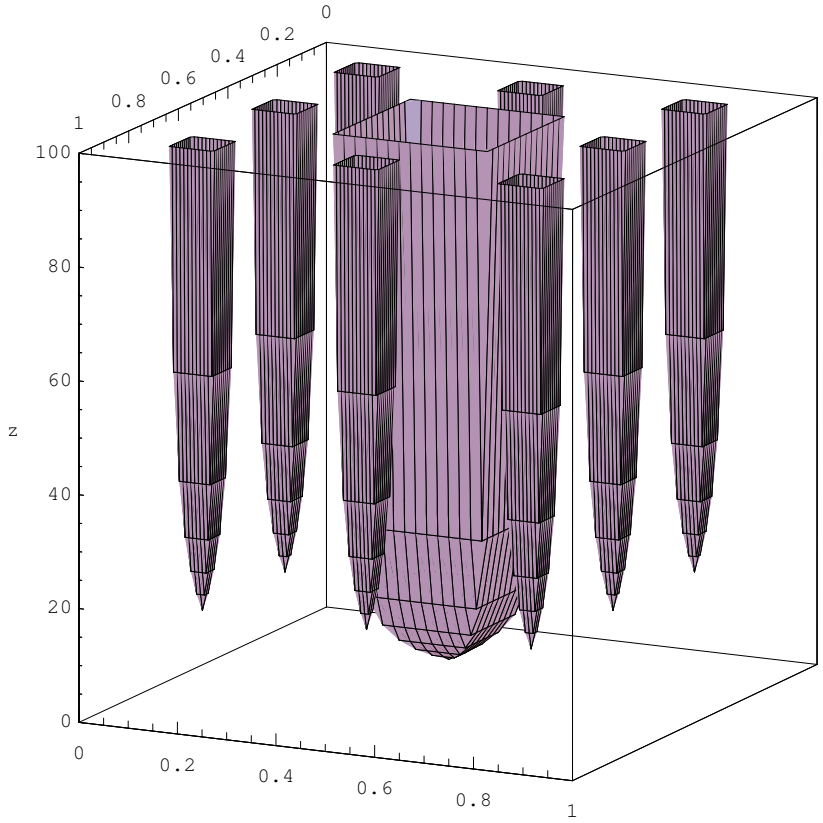


Sierpińskijev sag A i graf funkcije $d(x, A)$





Graf funkcije $d(x, A)^{-\gamma}$ za Sierpińskijev sag A



Slika: Vrijedi $\int_{[0,1]^2} d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty \iff \gamma < 2 - \log_3 8$.
Za $\gamma > 0$, graf se sastoji od prebrojivo mnogo neomeđenih povezanih komponenanta. (Lana Horvat Dmitrović i D.Ž., JMAA 2005.)

Harvey-Polkingov rezultat iz 1970.

Vrijedi puno općenitije, Harvey-Polking (*Acta Mathematica*, 1970.). Pretp.: $A \subset \mathbb{R}^N$ neprazan i omeđen, $\delta > 0$, $A_\delta := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A) < \delta\}$. Onda

$$\gamma < N - \overline{\dim}_B A \quad \Longrightarrow \quad \int_{A_\delta} d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty$$

Ako postoji $D = \dim_B A$ i $\mathcal{M}_*^D(A) > 0$, onda vrijedi i obrat. (Ž. RAE 2005., ISAAC Proc 2009.). Za $\gamma > N - \overline{\dim}_B A$ je integral beskonačan.

Harvey-Polkingov rezultat iz 1970.

Vrijedi puno općenitije, Harvey-Polking (*Acta Mathematica*, 1970.). Pretp.: $A \subset \mathbb{R}^N$ neprazan i omeđen, $\delta > 0$, $A_\delta := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A) < \delta\}$. Onda

$$\gamma < N - \overline{\dim}_B A \quad \Longrightarrow \quad \int_{A_\delta} d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty$$

Ako postoji $D = \dim_B A$ i $\mathcal{M}_*^D(A) > 0$, onda vrijedi i obrat. (Ž. RAE 2005., ISAAC Proc 2009.). Za $\gamma > N - \overline{\dim}_B A$ je integral beskonačan.

Malo općenitije: ako je $p \geq 1$, onda za bilo koji $\delta > 0$ vrijedi

$$\gamma < \frac{1}{p}(N - \overline{\dim}_B A) \quad \Longrightarrow \quad d(x, A)^{-\gamma} \in L^p(A_\delta)$$

Harvey-Polkingov rezultat iz 1970.

Vrijedi puno općenitije, Harvey-Polking (*Acta Mathematica*, 1970.). Pretp.: $A \subset \mathbb{R}^N$ neprazan i omeđen, $\delta > 0$, $A_\delta := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, A) < \delta\}$. Onda

$$\gamma < N - \overline{\dim}_B A \quad \Longrightarrow \quad \int_{A_\delta} d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty$$

Ako postoji $D = \dim_B A$ i $\mathcal{M}_*^D(A) > 0$, onda vrijedi i obrat. (Ž. RAE 2005., ISAAC Proc 2009.). Za $\gamma > N - \overline{\dim}_B A$ je integral beskonačan.

Malo općenitije: ako je $p \geq 1$, onda za bilo koji $\delta > 0$ vrijedi

$$\gamma < \frac{1}{p}(N - \overline{\dim}_B A) \quad \Longrightarrow \quad d(x, A)^{-\gamma} \in L^p(A_\delta)$$

Primjer. Neka je skup Ω otvoren i omeđen u $\mathbb{R}^N$ i

$$X = X(\Omega) \stackrel{def}{=} \{u \in H_0^1(\Omega) : \exists F \in L^2(\Omega) \ -\Delta u = F(x)\}$$

Želimo izračunati singularnu dimenziju $\mathrm{s\text{-}dim}\, X$.

Gledamo Dirichletov rubni problem sa specijalnom desnom stranom, gdje ćemo $\gamma > 0$ i $A \subset \Omega$ odabrati naknadno:

$$-\Delta u = F(x) \stackrel{def}{=} d(x, A)^{-\gamma}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Broj γ ne smije biti prevelik, jer treba osigurati L^2-integrabilnost desne strane, a ne smije biti niti premali, jer na skupu A želimo generirati singularitete rješenja u.

Gledamo Dirichletov rubni problem sa specijalnom desnom stranom, gdje ćemo $\gamma > 0$ i $A \subset \Omega$ odabrati naknadno:

$$-\Delta u = F(x) \stackrel{def}{=} d(x, A)^{-\gamma}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Broj γ ne smije biti prevelik, jer treba osigurati L^2-integrabilnost desne strane, a ne smije biti niti premali, jer na skupu A želimo generirati singularitete rješenja u.

Trebamo osigurati ova dva uvjeta na izbor γ i skupa A:

Gledamo Dirichletov rubni problem sa specijalnom desnom stranom, gdje ćemo $\gamma > 0$ i $A \subset \Omega$ odabrati naknadno:

$$-\Delta u = F(x) \stackrel{def}{=} d(x, A)^{-\gamma}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Broj γ ne smije biti prevelik, jer treba osigurati L^2-integrabilnost desne strane, a ne smije biti niti premali, jer na skupu A želimo generirati singularitete rješenja u.

Trebamo osigurati ova dva uvjeta na izbor γ i skupa A:

- L^2-integrabilnost od F, a to će biti za $\gamma < \frac{1}{2}(N - \dim_B A)$

Gledamo Dirichletov rubni problem sa specijalnom desnom stranom, gdje ćemo $\gamma > 0$ i $A \subset \Omega$ odabrati naknadno:

$$-\Delta u = F(x) \stackrel{def}{=} d(x, A)^{-\gamma}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Broj γ ne smije biti prevelik, jer treba osigurati L^2-integrabilnost desne strane, a ne smije biti niti premali, jer na skupu A želimo generirati singularitete rješenja u.

Trebamo osigurati ova dva uvjeta na izbor γ i skupa A:

- L^2-integrabilnost od F, a to će biti za $\gamma < \frac{1}{2}(N - \dim_B A)$
- generiranje singulariteta od u na A, a to će biti za $\gamma > 2$; naime, tada će biti $u(x) \geq Cd(x, A)^{-(\gamma-2)}$, za $C = \text{const} > 0$.

Znači, mora biti $2 < \frac{1}{2}(N - \dim_B A)$, tj. $\dim_B A < N - 4$, $N \geq 5$.

Gledamo Dirichletov rubni problem sa specijalnom desnom stranom, gdje ćemo $\gamma > 0$ i $A \subset \Omega$ odabrati naknadno:

$$-\Delta u = F(x) \stackrel{def}{=} d(x, A)^{-\gamma}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Broj γ ne smije biti prevelik, jer treba osigurati L^2-integrabilnost desne strane, a ne smije biti niti premali, jer na skupu A želimo generirati singularitete rješenja u.

Trebamo osigurati ova dva uvjeta na izbor γ i skupa A:

- L^2-integrabilnost od F, a to će biti za $\gamma < \frac{1}{2}(N - \dim_B A)$
- generiranje singulariteta od u na A, a to će biti za $\gamma > 2$; naime, tada će biti $u(x) \geq Cd(x, A)^{-(\gamma-2)}$, za $C = \text{const} > 0$.

Znači, mora biti $2 < \frac{1}{2}(N - \dim_B A)$, tj. $\dim_B A < N - 4$, $N \geq 5$.

Taj uvjet osiguravamo s pomoću *Cantorovog ražnja* (Cantor grill) oblika $A = C^{(a)} \times [0, 1]^{N-5}$, $a \in (0, 1/2)$. Vrijedi $\dim_B A = \dim_H A = \log_{1/a} 2 + (N - 5)$. Dakle, s-dim $X \geq N - 4$.

Gledamo Dirichletov rubni problem sa specijalnom desnom stranom, gdje ćemo $\gamma > 0$ i $A \subset \Omega$ odabrati naknadno:

$$-\Delta u = F(x) \stackrel{def}{=} d(x, A)^{-\gamma}, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Broj γ ne smije biti prevelik, jer treba osigurati L^2-integrabilnost desne strane, a ne smije biti niti premali, jer na skupu A želimo generirati singularitete rješenja u.

Trebamo osigurati ova dva uvjeta na izbor γ i skupa A:

- L^2-integrabilnost od F, a to će biti za $\gamma < \frac{1}{2}(N - \dim_B A)$
- generiranje singulariteta od u na A, a to će biti za $\gamma > 2$; naime, tada će biti $u(x) \geq Cd(x, A)^{-(\gamma-2)}$, za $C = \text{const} > 0$.

Znači, mora biti $2 < \frac{1}{2}(N - \dim_B A)$, tj. $\dim_B A < N - 4$, $N \geq 5$.

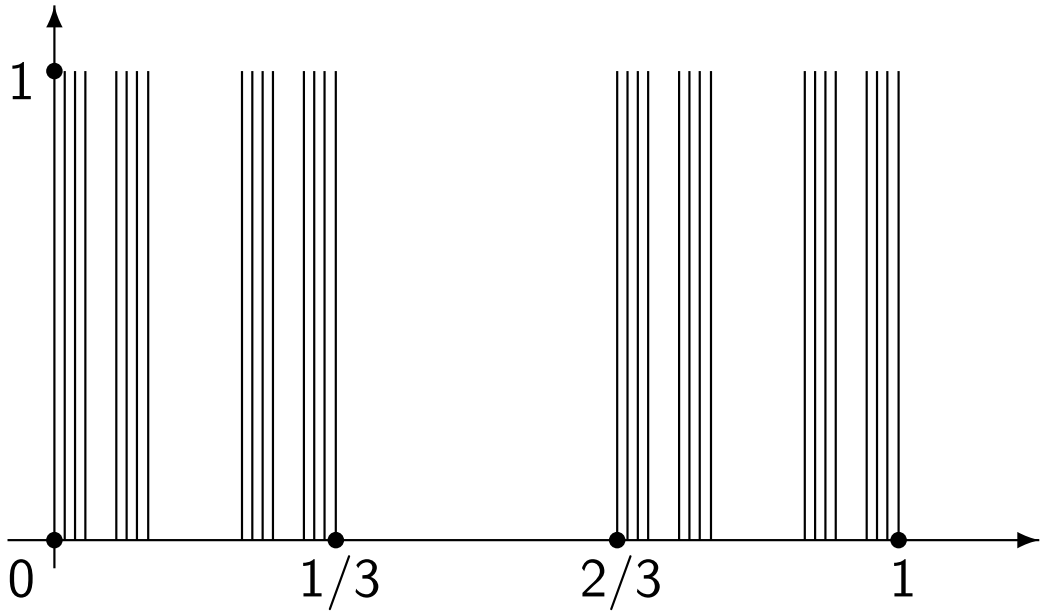
Taj uvjet osiguravamo s pomoću *Cantorovog ražnja* (Cantor grill) oblika $A = C^{(a)} \times [0, 1]^{N-5}$, $a \in (0, 1/2)$. Vrijedi $\dim_B A = \dim_H A = \log_{1/a} 2 + (N - 5)$. Dakle, $\text{s-dim}\, X \geq N - 4$.

Obratna nejednakost slijedi iz *eliptičke teorije regularnosti*: $\forall u \in X$,

$$u \in H^2 \stackrel{def}{=} W^{2,2}(\Omega) \;\Rightarrow\; \dim_H(\operatorname{Sing} u) \leq \text{s-dim}\, W^{2,2}(\Omega) = N - 4,$$

dakle $\text{s-dim}\, X \leq N - 4$. Zaključak: $\text{s-dim}\, X = N - 4$ za $N \geq 5$.

Cantorov ražanj $A = C^{(1/3)} \times [0,1]$



Cantorov ražanj $A = C^{(a)} \times [0,1]$ u ravnini $\mathbb{R}^2$ za $a = 1/3$ (općenito, $0 < a < 1/2$). Pripadajuća Hausdorffova i Minkowskijeva (box) dimenzija su međusobno jednake:

$$\dim_H A = \dim_B A = \log_{1/a} 2 + 1$$

i obje teže k 2 kad $a \to 1/2$.

Konstrukcija maksimalno singularnih funkcija u Banachovom prostoru X

Neka je X neki Banachov prostor realnih funkcija, takav da je s-dim $X > 0$. Onda u X postoji niz funkcija $v_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, takav da $\dim_H(\mathrm{Sing}\, v_k) \to$ s-dim X monotono kada $k \to \infty$. Pretpostavimo da su sve funkcije v_k nenegativne. Funkcija

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{v_k(x)}{\|v_k\|} \quad \text{(modificirani Steinov trik)}$$

je dobro definirana: red konvergira u prostoru X jer parcijalne sume čine Cauchyjev niz, pa je $v \in X$.

Konstrukcija maksimalno singularnih funkcija u Banachovom prostoru X

Neka je X neki Banachov prostor realnih funkcija, takav da je s-dim $X > 0$. Onda u X postoji niz funkcija $v_k : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, takav da $\dim_H(\mathrm{Sing}\, v_k) \to$ s-dim X monotono kada $k \to \infty$. Pretpostavimo da su sve funkcije v_k nenegativne. Funkcija

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{v_k(x)}{\|v_k\|} \quad \text{(modificirani Steinov trik)}$$

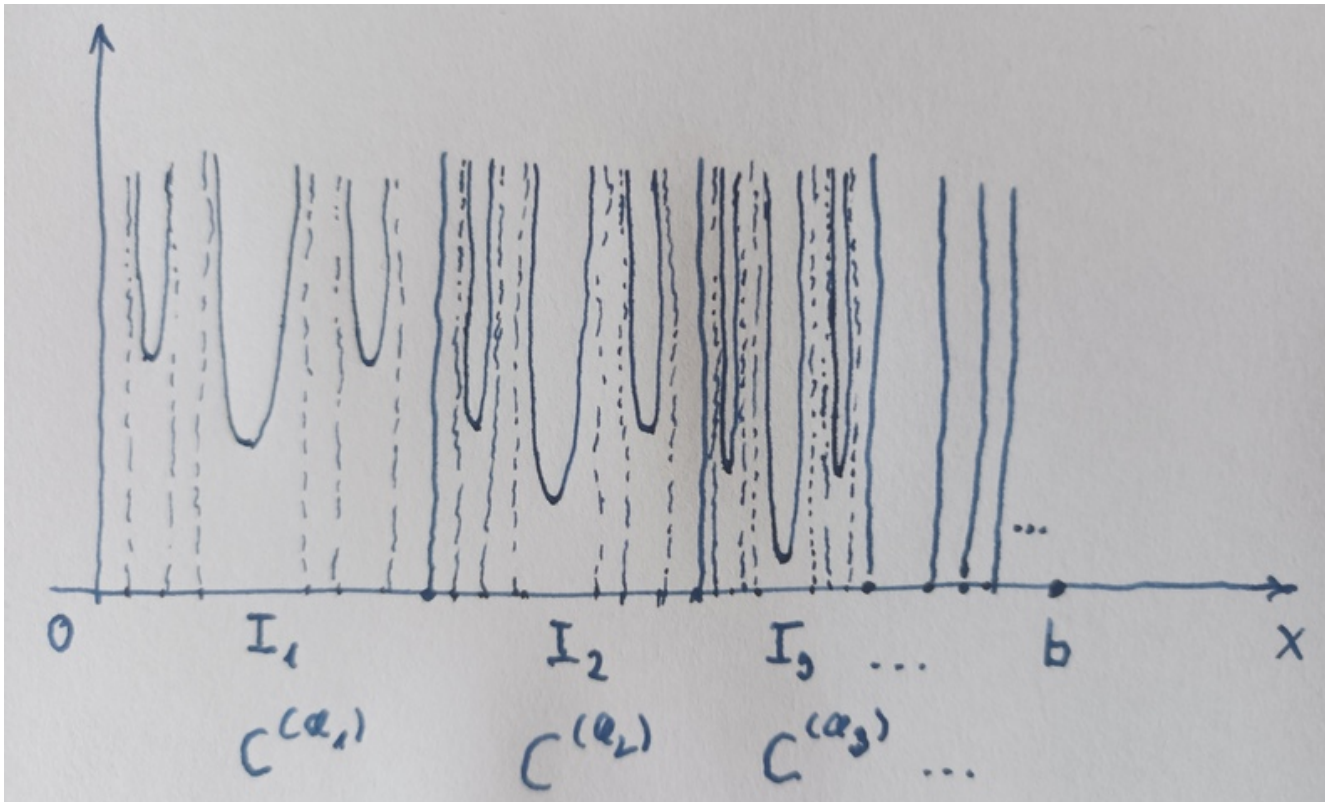
je dobro definirana: red konvergira u prostoru X jer parcijalne sume čine Cauchyjev niz, pa je $v \in X$.
Budući da su sve funkcije v_k nenegativne, onda je $\cup_k \mathrm{Sing}\, v_k \subseteq \mathrm{Sing}\, v$, pa radi prebrojive stabilnosti Hausdorffove dimenzije vrijedi

$$\text{s-dim}\, X = \sup_k(\dim_H(\mathrm{Sing}\, v_k)) \leq \dim_H(\mathrm{Sing}\, v) \leq \text{s-dim}\, X.$$

Dakle, $\dim_H(\mathrm{Sing}\, v) = \text{s-dim}\, X$, pa je v maksimalno singularna.

Grafički prikaz maksimalno singularne funkcije

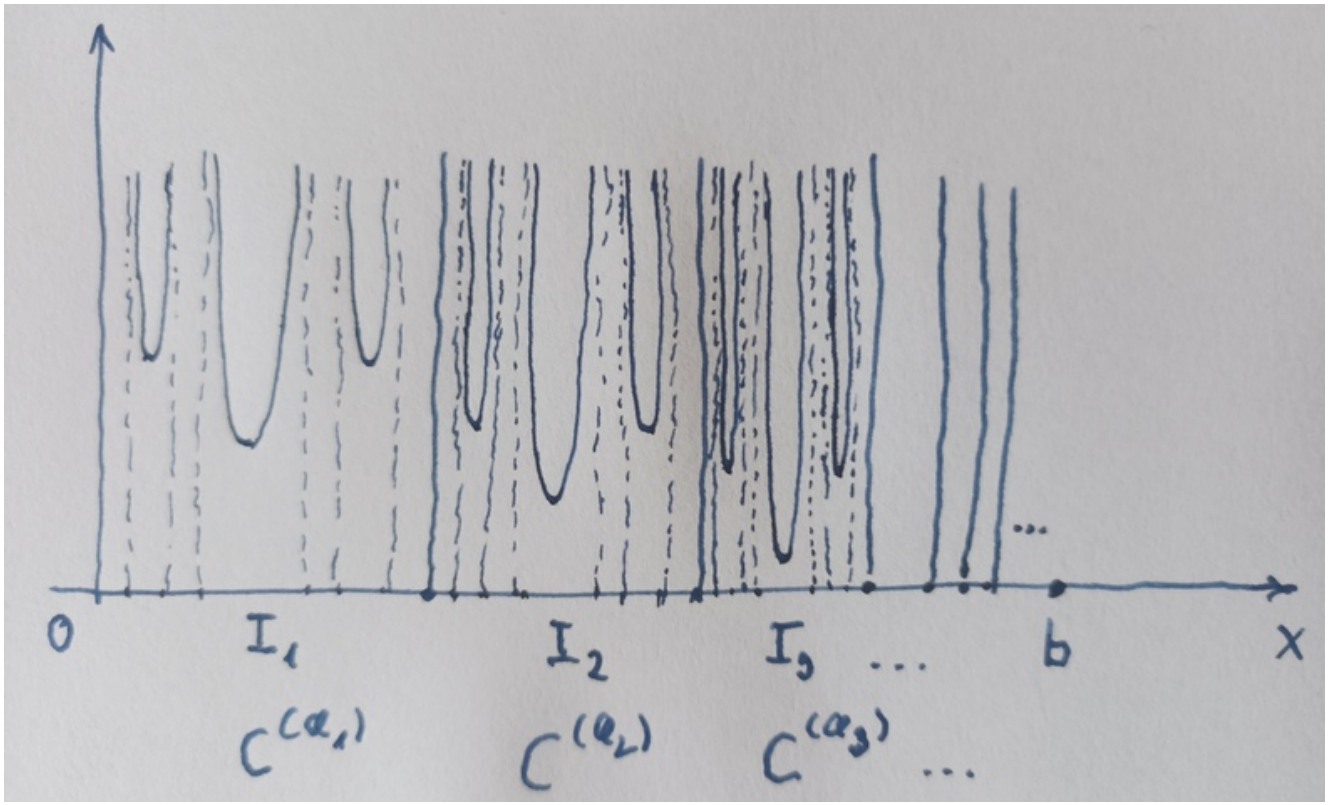
Primjer. Maksimalno singularna funkcije $u = u(x)$ u prostoru $X = L^1(0, b)$. (Slično i u $W^{k,p}(\Omega)$, itd.) Ovdje $a_k \to 1/2$ kada $k \to \infty$.



Slika: Graf maksimalno singularne funkcije $u \in L^1(0, b)$

Grafički prikaz maksimalno singularne funkcije

Primjer. Maksimalno singularna funkcije $u = u(x)$ u prostoru $X = L^1(0, b)$. (Slično i u $W^{k,p}(\Omega)$, itd.) Ovdje $a_k \to 1/2$ kada $k \to \infty$.



Slika: Graf maksimalno singularne funkcije $u \in L^1(0, b)$

Primijetimo da je $\dim_H(\mathrm{Sing}\, u|_{(b-r,b)}) = \text{s-dim}\, X = 1$ za $r > 0$ po volji mali. U točki $x = b$, funkcija u je maksimalno singularna.

Singularna dimenzija funkcije $u \in X$ u točki $a \in \overline{\Omega}$

Za L-izmjerivu funkciju $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiramo njenu singularnu dimenziju u točki $a \in \overline{\Omega}$:

$$(\mathrm{sd}\, u)(a) = \lim_{r \to 0^+} \dim_H (\mathrm{Sing}\, u|_{B_r(a) \cap \Omega})$$

Singularna dimenzija funkcije $u \in X$ u točki $a \in \overline{\Omega}$

Za L-izmjerivu funkciju $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiramo njenu singularnu dimenziju u točki $a \in \overline{\Omega}$:

$$(\mathrm{sd}\, u)(a) = \lim_{r \to 0^+} \dim_H(\mathrm{Sing}\, u|_{B_r(a) \cap \Omega})$$

Time smo dobili funkciju $(\mathrm{sd}\, u) : \overline{\Omega} \to [0, N]$. Pokazuje se da je ona odozdol poluneprekinuta.

Singularna dimenzija funkcije $u \in X$ u točki $a \in \overline{\Omega}$

Za L-izmjerivu funkciju $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiramo njenu singularnu dimenziju u točki $a \in \overline{\Omega}$:

$$(\operatorname{sd} u)(a) = \lim_{r \to 0^+} \dim_H(\operatorname{Sing} u|_{B_r(a) \cap \Omega})$$

Time smo dobili funkciju $(\operatorname{sd} u) : \overline{\Omega} \to [0, N]$. Pokazuje se da je ona odozdol poluneprekinuta.

OP. Za zadani skup X (na primjer za X generiran Laplaceovom jednadžbom) i zadanu odozdol poluneprekinutu funkciju $f : \overline{\Omega} \to [0, N]$, postoji li $u \in X$ tako da je $(\operatorname{sd} u) = f$?

Singularna dimenzija funkcije $u \in X$ u točki $a \in \overline{\Omega}$

Za L-izmjerivu funkciju $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiramo njenu singularnu dimenziju u točki $a \in \overline{\Omega}$:

$$(\mathrm{sd}\, u)(a) = \lim_{r \to 0^+} \dim_H(\mathrm{Sing}\, u|_{B_r(a) \cap \Omega})$$

Time smo dobili funkciju $(\mathrm{sd}\, u) : \overline{\Omega} \to [0, N]$. Pokazuje se da je ona odozdol poluneprekinuta.

OP. Za zadani skup X (na primjer za X generiran Laplaceovom jednadžbom) i zadanu odozdol poluneprekinutu funkciju $f : \overline{\Omega} \to [0, N]$, postoji li $u \in X$ tako da je $(\mathrm{sd}\, u) = f$?

Za funkciju $u \in X$ kažemo da je maksimalno singularna **u točki** $a \in \overline{\Omega}$ ako vrijedi $(\mathrm{sd}\, u)(a) = \mathrm{s\text{-}dim}\, X$.

Singularna dimenzija funkcije $u \in X$ u točki $a \in \overline{\Omega}$

Za L-izmjerivu funkciju $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiramo njenu singularnu dimenziju u točki $a \in \overline{\Omega}$:

$$(\operatorname{sd} u)(a) = \lim_{r \to 0^+} \dim_H (\operatorname{Sing} u|_{B_r(a) \cap \Omega})$$

Time smo dobili funkciju $(\operatorname{sd} u) : \overline{\Omega} \to [0, N]$. Pokazuje se da je ona odozdol poluneprekinuta.

OP. Za zadani skup X (na primjer za X generiran Laplaceovom jednadžbom) i zadanu odozdol poluneprekinutu funkciju $f : \overline{\Omega} \to [0, N]$, postoji li $u \in X$ tako da je $(\operatorname{sd} u) = f$?

Za funkciju $u \in X$ kažemo da je maksimalno singularna **u točki** $a \in \overline{\Omega}$ ako vrijedi $(\operatorname{sd} u)(a) = \operatorname{s-dim} X$.

Za svaki od već spomenutih Hilbertovih prostora X moguće je konstruirati funkciju $u \in X$ koja je maksimalno singularna <u>u svim</u> točkama skupa $\overline{\Omega}$ (J-P. Milišić i D.Ž., RMJM 2021., za Dirichletov problem).

Točkovni kontrast za L-izmjerivu funkciju

Kažemo da L-izmjeriva funkcija $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ima u točki $a \in \overline{\Omega}$ kontrast tipa (d), gdje je $d \in (0, N]$, ako vrijedi da je

$$(\operatorname{sd} u)(a) = d$$

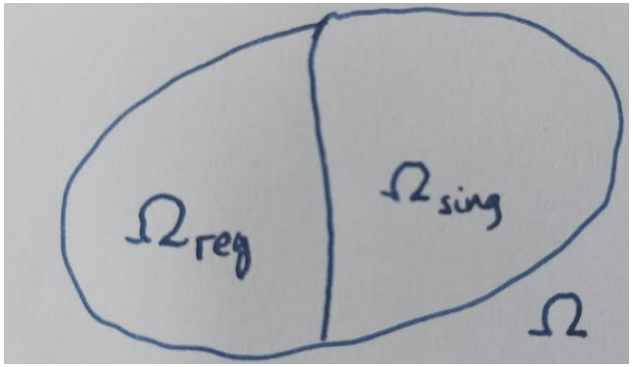
$$(\forall r > 0)(\exists V_r^{(\text{otv.})} \subseteq B_r(a)) \operatorname{Sing} u|_{V_r} = \emptyset$$

Točkovni kontrast za L-izmjerivu funkciju

Kažemo da L-izmjeriva funkcija $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ima u točki $a \in \overline{\Omega}$ kontrast tipa (d), gdje je $d \in (0, N]$, ako vrijedi da je

$$(\mathrm{sd}\, u)(a) = d$$

$$(\forall r > 0)(\exists V_r^{(\text{otv.})} \subseteq B_r(a))\ \mathrm{Sing}\, u|_{V_r} = \emptyset$$



Slika: Neka su Ω_{reg} i Ω_{sing} zadani otvoreni podskupovi od Ω kao na slici: $\overline{\Omega}_{reg} \cup \overline{\Omega}_{sing} = \overline{\Omega}$. Za Dirichletov problem $-\Delta u = F(x)$, $u \in H_0^1(\Omega)$, postoji $F \in L^2(\Omega)$ t.d. za pripadajuće rješenje u vrijedi da je klase $C^{(2)}$ na Ω_{reg}, dok je u maksimalno singularna u svakoj točki iz $\overline{\Omega}_{sing}$. Svaka točka $a \in \overline{\Omega}_{reg} \cap \overline{\Omega}_{sing}$ je točka maksimalnog kontrasta (tj. $d = N$). Podsjetimo da je $\mathrm{s\text{-}dim}\, X = (N-4)_+$, pa zato uzimamo $N \geq 5$. (Milišić i Ž., RMJM 2021.)

2. dio

Fraktalne strune i zeta funkcije kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^N$

Ključne riječi:
fraktalne strune, geometrijske zeta funkcije, Minkowskijev sadržaj (gornji i dolnji), Minkowskijeva nedegeneriranost, Minkowskijeva izmjerivost, kompleksne dimenzije, zeta funkcija funkcija kompaktnog skupa, tenzorski produkt fraktalnih struna, disjunktna unija fraktalnih struna

Fraktalne strune i geometrijske zeta funkcije

Pojam je uveo Michel L. Lapidus početkom 1990ih.

Fraktalna struna $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j \geq 1}$ je padajući niz pozitivnih realnih brojeva ℓ_j takvih da je $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j < +\infty$.

Fraktalne strune i geometrijske zeta funkcije

Pojam je uveo Michel L. Lapidus početkom 1990ih.

Fraktalna struna $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ je padajući niz pozitivnih realnih brojeva ℓ_j takvih da je $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j < +\infty$.

Geometrijska zeta funkcija $\zeta_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je funkcija kompleksne varijable s definirana kao *Dirichletov red*:

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (\ell_j)^s$$

Fraktalne strune i geometrijske zeta funkcije

Pojam je uveo Michel L. Lapidus početkom 1990ih.

Fraktalna struna $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ je padajući niz pozitivnih realnih brojeva ℓ_j takvih da je $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j < +\infty$.

Geometrijska zeta funkcija $\zeta_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je funkcija kompleksne varijable s definirana kao *Dirichletov red*:

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (\ell_j)^s$$

Infimum svih $D \in \mathbb{R}$ takvih da red $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ konvergira apsolutno na otvorenoj desnoj poluravnini $\{\mathrm{Re}\, s > D\}$ zove se *apscisa apsolutne konvergencije* zeta funkcije $\zeta_{\mathcal{L}}$. Oznaka: $D(\zeta_{\mathcal{L}}) \in [0, 1]$.

Fraktalne strune i geometrijske zeta funkcije

Pojam je uveo Michel L. Lapidus početkom 1990ih.

Fraktalna struna $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ je padajući niz pozitivnih realnih brojeva ℓ_j takvih da je $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j < +\infty$.

Geometrijska zeta funkcija $\zeta_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je funkcija kompleksne varijable s definirana kao *Dirichletov red*:

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (\ell_j)^s$$

Infimum svih $D \in \mathbb{R}$ takvih da red $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ konvergira apsolutno na otvorenoj desnoj poluravnini $\{\mathrm{Re}\, s > D\}$ zove se *apscisa apsolutne konvergencije* zeta funkcije $\zeta_{\mathcal{L}}$. Oznaka: $D(\zeta_{\mathcal{L}}) \in [0, 1]$.
Pretpostavimo da je $\zeta_{\mathcal{L}}$ meromorfno proširiva na poluravninu $\{\mathrm{Re}\, s > \alpha\}$ za $\alpha < D(\zeta_{\mathcal{L}})$. Polovi od $\zeta_{\mathcal{L}}$ na osi $\{\mathrm{Re}\, s = D(\zeta_{\mathcal{L}})\}$ zovu se glavne kompleksne dimenzije od $\mathcal{L}$: $\dim_{PC} \mathcal{L}$.

Fraktalne strune i geometrijske zeta funkcije

Pojam je uveo Michel L. Lapidus početkom 1990ih.

Fraktalna struna $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ je padajući niz pozitivnih realnih brojeva ℓ_j takvih da je $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j < +\infty$.

Geometrijska zeta funkcija $\zeta_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je funkcija kompleksne varijable s definirana kao *Dirichletov red*:

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (\ell_j)^s$$

Infimum svih $D \in \mathbb{R}$ takvih da red $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ konvergira apsolutno na otvorenoj desnoj poluravnini $\{\mathrm{Re}\, s > D\}$ zove se *apscisa apsolutne konvergencije* zeta funkcije $\zeta_{\mathcal{L}}$. Oznaka: $D(\zeta_{\mathcal{L}}) \in [0, 1]$.
Pretpostavimo da je $\zeta_{\mathcal{L}}$ meromorfno proširiva na poluravninu $\{\mathrm{Re}\, s > \alpha\}$ za $\alpha < D(\zeta_{\mathcal{L}})$. Polovi od $\zeta_{\mathcal{L}}$ na osi $\{\mathrm{Re}\, s = D(\zeta_{\mathcal{L}})\}$ zovu se glavne kompleksne dimenzije od $\mathcal{L}$: $\dim_{PC} \mathcal{L}$.
Kompleksne dimenzije su uveli Michel Lapidus i Machiel van Frankenhuijsen 1996.

Riemannova zeta funkcija, a-struna i Cantorova struna

Kompleksne dimenzije Cantorove strune (tj. polovi od $\zeta_{\mathcal{L}_{CS}}$) su

$$\dim_{PC} \mathcal{L}_{CS} = \log_3 2 + \frac{2\pi}{\ln 3} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Riemannova zeta funkcija, a-struna i Cantorova struna

Primjer. Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-2})_{j\geq 1}$ dobivamo $\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \zeta_R(2s)$, tj. skaliranu Riemannovu zeta funkciju. Tu je $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/2$ i $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/2\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$).

Kompleksne dimenzije Cantorove strune (tj. polovi od $\zeta_{\mathcal{L}_{CS}}$) su

$$\dim_{PC} \mathcal{L}_{CS} = \log_3 2 + \frac{2\pi}{\ln 3} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Riemannova zeta funkcija, a-struna i Cantorova struna

Primjer. Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-2})_{j\geq 1}$ dobivamo $\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \zeta_R(2s)$, tj. skaliranu Riemannovu zeta funkciju. Tu je $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/2$ i $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/2\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$).

Primjer. Za a-strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j\geq 1}$, gdje je $a > 0$, dobivamo $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/(1+a)$. Ovdje je $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/(1+a)\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$). Skup $A = \{k^{-a}\}_{k\geq 1}$ je *geometrijska realizacija f. strune* (definicija malo kasnije).

Kompleksne dimenzije Cantorove strune (tj. polovi od $\zeta_{\mathcal{L}_{CS}}$) su

$$\dim_{PC} \mathcal{L}_{CS} = \log_3 2 + \frac{2\pi}{\ln 3} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Riemannova zeta funkcija, a-struna i Cantorova struna

Primjer. Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-2})_{j\geq 1}$ dobivamo $\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \zeta_R(2s)$, tj. skaliranu Riemannovu zeta funkciju. Tu je $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/2$ i $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/2\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$).

Primjer. Za a-strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j\geq 1}$, gdje je $a > 0$, dobivamo $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/(1+a)$. Ovdje je $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/(1+a)\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$). Skup $A = \{k^{-a}\}_{k\geq 1}$ je *geometrijska realizacija f. strune* (definicija malo kasnije).

Primjer. *Cantorova struna* je

$$\mathcal{L}_{CS} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \dots \right\}$$

Kompleksne dimenzije Cantorove strune (tj. polovi od $\zeta_{\mathcal{L}_{CS}}$) su

$$\dim_{PC} \mathcal{L}_{CS} = \log_3 2 + \frac{2\pi}{\ln 3} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Riemannova zeta funkcija, a-struna i Cantorova struna

Primjer. Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-2})_{j\geq 1}$ dobivamo $\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \zeta_R(2s)$, tj. skaliranu Riemannovu zeta funkciju. Tu je $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/2$ i $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/2\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$).

Primjer. Za a-strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j\geq 1}$, gdje je $a > 0$, dobivamo $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/(1+a)$. Ovdje je $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/(1+a)\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$). Skup $A = \{k^{-a}\}_{k\geq 1}$ je *geometrijska realizacija f. strune* (definicija malo kasnije).

Primjer. *Cantorova struna* je

$$\mathcal{L}_{CS} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \dots \right\}$$

Na $\{\operatorname{Re} s > \log_3 2\}$ vrijedi (nakon sumiranja Dirichletova reda):

$$\zeta_{CS}(s) = \frac{3^{-s}}{1 - 2 \cdot 3^{-s}}$$

Kompleksne dimenzije Cantorove strune (tj. polovi od $\zeta_{\mathcal{L}_{CS}}$) su

$$\dim_{PC} \mathcal{L}_{CS} = \log_3 2 + \frac{2\pi}{\ln 3} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Riemannova zeta funkcija, a-struna i Cantorova struna

Primjer. Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-2})_{j\geq 1}$ dobivamo $\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \zeta_R(2s)$, tj. skaliranu Riemannovu zeta funkciju. Tu je $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/2$ i $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/2\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$).

Primjer. Za a-strunu $\mathcal{L} = (\ell_j = j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j\geq 1}$, gdje je $a > 0$, dobivamo $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = 1/(1+a)$. Ovdje je $\dim_{PC} \mathcal{L} = \{1/(1+a)\}$ (pol prvog reda i jedini pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$). Skup $A = \{k^{-a}\}_{k\geq 1}$ je *geometrijska realizacija f. strune* (definicija malo kasnije).

Primjer. *Cantorova struna* je

$$\mathcal{L}_{CS} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \dots \right\}$$

Na $\{\operatorname{Re} s > \log_3 2\}$ vrijedi (nakon sumiranja Dirichletova reda):

$$\zeta_{CS}(s) = \frac{3^{-s}}{1 - 2 \cdot 3^{-s}}$$

Kompleksne dimenzije Cantorove strune (tj. polovi od $\zeta_{\mathcal{L}_{CS}}$) su

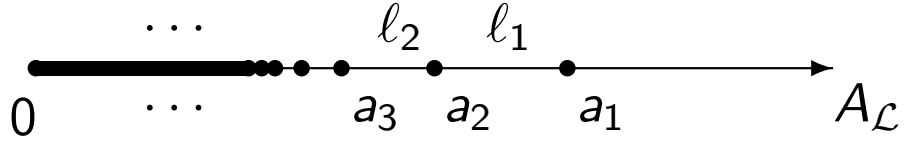
$$\dim_{PC} \mathcal{L}_{CS} = \log_3 2 + \frac{2\pi}{\ln 3} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Geometrijska realizacija A fraktalne strune $\mathcal{L}$

Neka je $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ zadana fraktalna struna. Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je skup $A = \{a_k : k \geq 1\}$, gdje je $a_1 = \sum_{j\geq 1} \ell_j$, $a_{k+1} = a_k - \ell_k$, za $k \geq 1$.

Geometrijska realizacija A fraktalne strune $\mathcal{L}$

Neka je $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ zadana fraktalna struna. Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je skup $A = \{a_k : k \geq 1\}$, gdje je $a_1 = \sum_{j\geq 1} \ell_j$, $a_{k+1} = a_k - \ell_k$, za $k \geq 1$.

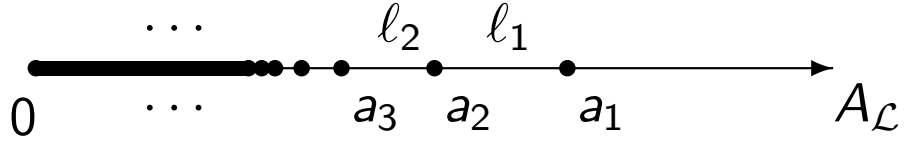


Slika: Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$

Elementi od A leže u intervalu $I = (0, a_1)$, a interval $I_k = (a_{k+1}, a_k)$ je širine ℓ_k. Niz $(a_k)_{k\geq 1}$ je opadajuć i konvergira prema nuli. Vrijedi $I \setminus A = \cup_{k\geq 1} I_k$, i unija je disjunktna.

Geometrijska realizacija A fraktalne strune $\mathcal{L}$

Neka je $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ zadana fraktalna struna. Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je skup $A = \{a_k : k \geq 1\}$, gdje je $a_1 = \sum_{j\geq 1} \ell_j$, $a_{k+1} = a_k - \ell_k$, za $k \geq 1$.

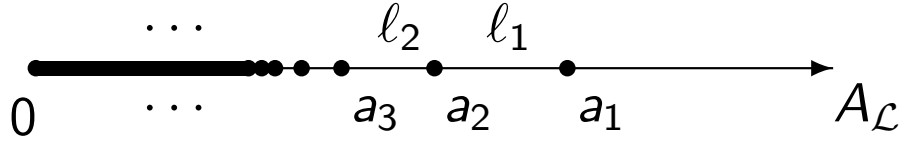


Slika: Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$

Elementi od A leže u intervalu $I = (0, a_1)$, a interval $I_k = (a_{k+1}, a_k)$ je širine ℓ_k. Niz $(a_k)_{k\geq 1}$ je opadajuć i konvergira prema nuli. Vrijedi $I \setminus A = \cup_{k\geq 1} I_k$, i unija je disjunktna.(Izvorno, geometrijska realizacija strune $\mathcal{L}$ definirna je kao $\cup_k I_k$.)

Geometrijska realizacija A fraktalne strune $\mathcal{L}$

Neka je $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ zadana fraktalna struna. Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je skup $A = \{a_k : k \geq 1\}$, gdje je $a_1 = \sum_{j\geq 1} \ell_j$, $a_{k+1} = a_k - \ell_k$, za $k \geq 1$.



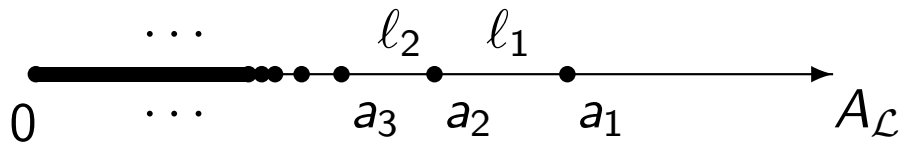
Slika: Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$

Elementi od A leže u intervalu $I = (0, a_1)$, a interval $I_k = (a_{k+1}, a_k)$ je širine ℓ_k. Niz $(a_k)_{k\geq 1}$ je opadajuć i konvergira prema nuli. Vrijedi $I \setminus A = \cup_{k\geq 1} I_k$, i unija je disjunktna.(Izvorno, geometrijska realizacija strune $\mathcal{L}$ definirna je kao $\cup_k I_k$.)

- Pokazuje se da je $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = \overline{\dim}_B A$ (Lapidus, 1992.).

Geometrijska realizacija A fraktalne strune $\mathcal{L}$

Neka je $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ zadana fraktalna struna. Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L}$ je skup $A = \{a_k : k \geq 1\}$, gdje je $a_1 = \sum_{j\geq 1} \ell_j$, $a_{k+1} = a_k - \ell_k$, za $k \geq 1$.



Slika: Geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ fraktalne strune $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$

Elementi od A leže u intervalu $I = (0, a_1)$, a interval $I_k = (a_{k+1}, a_k)$ je širine ℓ_k. Niz $(a_k)_{k\geq 1}$ je opadajuć i konvergira prema nuli. Vrijedi $I \setminus A = \cup_{k\geq 1} I_k$, i unija je disjunktna.(Izvorno, geometrijska realizacija strune $\mathcal{L}$ definirna je kao $\cup_k I_k$.)

- Pokazuje se da je $D(\zeta_{\mathcal{L}}) = \overline{\dim}_B A$ (Lapidus, 1992.).
- Ako je $D_{\mathrm{mer}}(\zeta_{\mathcal{L}}) < \overline{\dim}_B A =: D$ i $\mathcal{M}_*^D(A) > 0$, onda je $\overline{\dim}_B A$ jedna od glavnih kompleksnih dimenzija od $\mathcal{L}$.

Minkowskijeva (box) dimenzija i sadržaj skupova u $\mathbb{R}^N$

Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^N$ neprazan i **omeđen**. Za bilo koji $r > 0$ definiramo dolnji i gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj (Herbert Federer, *Geometric Measure Theory*, 1969):

$$\mathcal{M}_*^r(A) \stackrel{def}{=} \liminf_{t \to 0^+} \frac{|A_t|_N}{t^{N-r}}, \quad \mathcal{M}^{*r}(A) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t|_N}{t^{N-r}}$$

gdje je A_t otvoren t-okoliš skupa A u $\mathbb{R}^N$, a $|\cdot|_N$ Lebesgueova mjera.

Minkowskijeva (box) dimenzija i sadržaj skupova u $\mathbb{R}^N$

Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^N$ neprazan i **omeđen**. Za bilo koji $r > 0$ definiramo dolnji i gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj (Herbert Federer, *Geometric Measure Theory*, 1969):

$$\mathcal{M}_*^r(A) \stackrel{def}{=} \liminf_{t \to 0^+} \frac{|A_t|_N}{t^{N-r}}, \quad \mathcal{M}^{*r}(A) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t|_N}{t^{N-r}}$$

gdje je A_t otvoren t-okoliš skupa A u $\mathbb{R}^N$, a $|\cdot|_N$ Lebesgueova mjera.

Definiramo dolnju i gornju box (ili Minkowskijevu) dimenziju od A:

$$\underline{\dim}_B A \stackrel{def}{=} \inf\{r > 0 : \mathcal{M}_*^r(A) = 0\}$$

Minkowskijeva (box) dimenzija i sadržaj skupova u $\mathbb{R}^N$

Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^N$ neprazan i **omeđen**. Za bilo koji $r > 0$ definiramo dolnji i gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj (Herbert Federer, *Geometric Measure Theory*, 1969):

$$\mathcal{M}_*^r(A) \stackrel{def}{=} \liminf_{t \to 0^+} \frac{|A_t|_N}{t^{N-r}}, \quad \mathcal{M}^{*r}(A) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t|_N}{t^{N-r}}$$

gdje je A_t otvoren t-okoliš skupa A u $\mathbb{R}^N$, a $|\cdot|_N$ Lebesgueova mjera.

Definiramo dolnju i gornju box (ili Minkowskijevu) dimenziju od A:

$$\underline{\dim}_B A \stackrel{def}{=} \inf\{r > 0 : \mathcal{M}_*^r(A) = 0\}$$

$$\overline{\dim}_B A \stackrel{def}{=} \inf\{r > 0 : \mathcal{M}^{*r}(A) = 0\}$$

Minkowskijeva (box) dimenzija i sadržaj skupova u $\mathbb{R}^N$

Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^N$ neprazan i **omeđen**. Za bilo koji $r > 0$ definiramo dolnji i gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj (Herbert Federer, *Geometric Measure Theory*, 1969):

$$\mathcal{M}_*^r(A) \stackrel{def}{=} \liminf_{t \to 0^+} \frac{|A_t|_N}{t^{N-r}}, \quad \mathcal{M}^{*r}(A) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t|_N}{t^{N-r}}$$

gdje je A_t otvoren t-okoliš skupa A u $\mathbb{R}^N$, a $|\cdot|_N$ Lebesgueova mjera.

Definiramo dolnju i gornju box (ili Minkowskijevu) dimenziju od A:

$$\underline{\dim}_B A \stackrel{def}{=} \inf\{r > 0 : \mathcal{M}_*^r(A) = 0\}$$

$$\overline{\dim}_B A \stackrel{def}{=} \inf\{r > 0 : \mathcal{M}^{*r}(A) = 0\}$$

Vrijedi $0 \leq \dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A \leq N$.

Minkowskijeva izmjerivost i nedegeneriranost skupova i fraktalnih struna

(Stachó 1976.) Kažemo da je skup A Minkowski izmjeriv ako postoji $D \in [0, N]$ t.d. je $\mathcal{M}_*^D(A) = \mathcal{M}^{*D}(A) \stackrel{def}{=} \mathcal{M}^D(A)$ i

$$0 < \mathcal{M}^D(A) < +\infty$$

Minkowskijeva izmjerivost i nedegeneriranost skupova i fraktalnih struna

(Stachó 1976.) Kažemo da je skup A Minkowski izmjeriv ako postoji $D \in [0, N]$ t.d. je $\mathcal{M}_*^D(A) = \mathcal{M}^{*D}(A) \stackrel{def}{=} \mathcal{M}^D(A)$ i

$$0 < \mathcal{M}^D(A) < +\infty$$

Onda vrijedi $D = \dim_B A$.

Minkowskijeva izmjerivost i nedegeneriranost skupova i fraktalnih struna

(Stachó 1976.) Kažemo da je skup A Minkowski izmjeriv ako postoji $D \in [0, N]$ t.d. je $\mathcal{M}_*^D(A) = \mathcal{M}^{*D}(A) \stackrel{def}{=} \mathcal{M}^D(A)$ i

$$0 < \mathcal{M}^D(A) < +\infty$$

Onda vrijedi $D = \dim_B A$.

(Lapidus 1991., Ž 2006.) Kažemo da je skup A Minkowski nedegeneriran ako postoji $D \in [0, N]$ t.d.

$$0 < \mathcal{M}_*^D(A) \leq \mathcal{M}^{*D}(A) < +\infty$$

Onda je $D = \dim_B A$.

Minkowskijeva izmjerivost i nedegeneriranost skupova i fraktalnih struna

(Stachó 1976.) Kažemo da je skup A Minkowski izmjeriv ako postoji $D \in [0, N]$ t.d. je $\mathcal{M}_*^D(A) = \mathcal{M}^{*D}(A) \stackrel{def}{=} \mathcal{M}^D(A)$ i

$$0 < \mathcal{M}^D(A) < +\infty$$

Onda vrijedi $D = \dim_B A$.

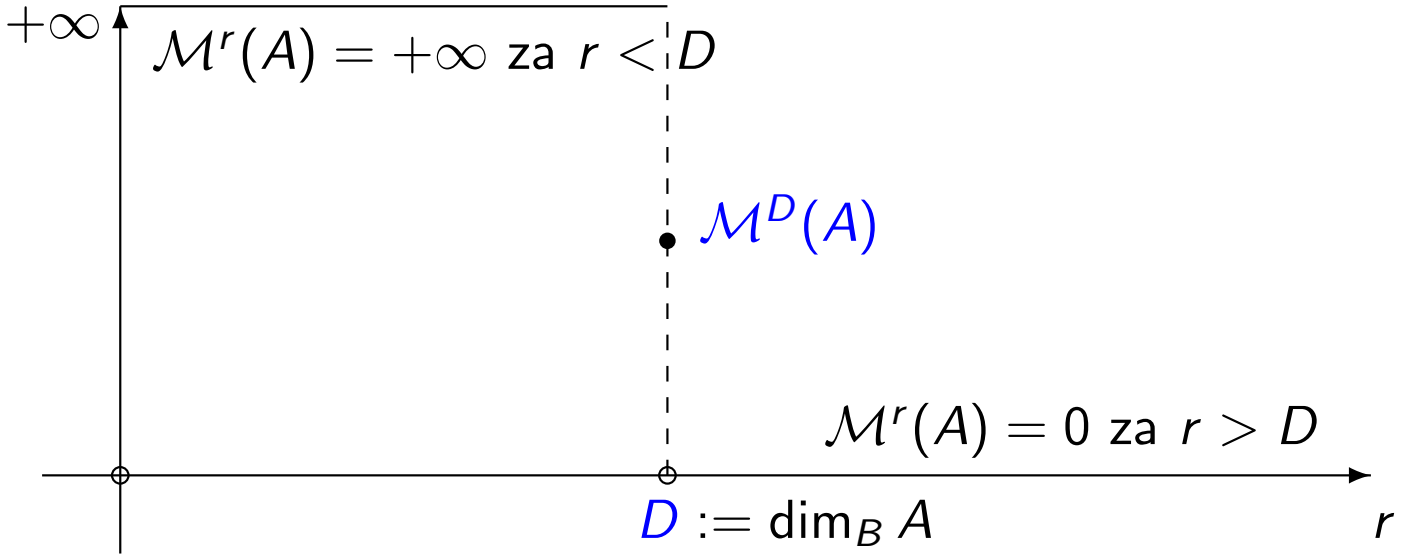
(Lapidus 1991., Ž 2006.) Kažemo da je skup A Minkowski nedegeneriran ako postoji $D \in [0, N]$ t.d.

$$0 < \mathcal{M}_*^D(A) \leq \mathcal{M}^{*D}(A) < +\infty$$

Onda je $D = \dim_B A$.

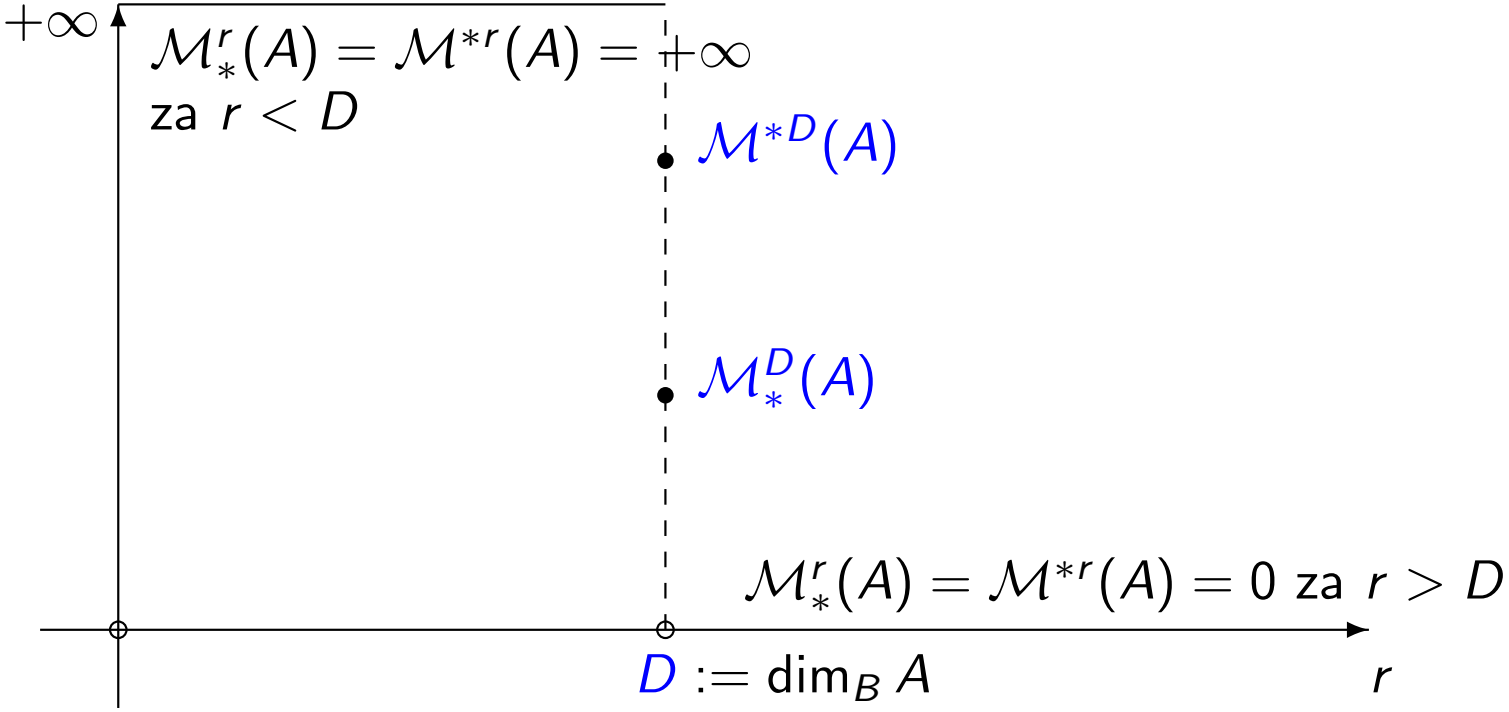
Kažemo da je fraktalna struna $\mathcal{L}$ Minkowski izmjeriva (Minkowski nedegenerirana) ako je takva i njena geometrijska realizacija $A = A_{\mathcal{L}}$ u $\mathbb{R}$.

Slučaj Minkowski izmjerivog skupa A



Slika: Graf funkcije $r \mapsto \mathcal{M}^r(A)$ u slučaju kad je A *Minkowski izmjeriv* skup, tj. $D := \dim_B A$ i $\mathcal{M}^D(A)$ postoje i $0 < \mathcal{M}^D(A) < \infty$.

Slučaj Minkowski nedegeneriranog skupa A



Slika: Grafovi funkcija $r \mapsto \mathcal{M}_*^r(A)$ i $r \mapsto \mathcal{M}^{*r}(A)$, u slučaju kad je A *Minkowski nondegeneriran* skup, tj. $D := \dim_B A$ postoji i $0 < \mathcal{M}_*^D(A) \leq \mathcal{M}^{*D}(A) < \infty$.

Kompleksne dimenzije, izmjerivost i neizmjerivost f. strune

Postojanje *samo jedne* glavne kompleksne dimenzije kratnosti jedan fraktalne strune $\mathcal{L}$, ima veze s *Minkowskijevom* <u>*izmjerivošću*</u> skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: a-struna $\mathcal{L} = (j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j \geq 1}$, za $a > 0$, tj. $A_{\mathcal{L}} = \{k^{-a} : k \in \mathbb{N}\}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Kompleksne dimenzije, izmjerivost i neizmjerivost f. strune

Postojanje *samo jedne* glavne kompleksne dimenzije kratnosti jedan fraktalne strune $\mathcal{L}$, ima veze s *Minkowskijevom* <u>*izmjerivošću*</u> skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: a-struna $\mathcal{L} = (j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j \geq 1}$, za $a > 0$, tj. $A_{\mathcal{L}} = \{k^{-a} : k \in \mathbb{N}\}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Periodičnost skupa glavnih kompleksnih dimenzija od $\mathcal{L}$ kratnosti jedan, ima veze s *Minkowskijevom nedegeneriranošću i* <u>*neizmjerivošću*</u> skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: Cantorova struna $\mathcal{L}_{CS}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Kompleksne dimenzije, izmjerivost i neizmjerivost f. strune

Postojanje *samo jedne* glavne kompleksne dimenzije kratnosti jedan fraktalne strune $\mathcal{L}$, ima veze s *Minkowskijevom* <u>*izmjerivošću*</u> skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: a-struna $\mathcal{L} = (j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j \geq 1}$, za $a > 0$, tj. $A_{\mathcal{L}} = \{k^{-a} : k \in \mathbb{N}\}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Periodičnost skupa glavnih kompleksnih dimenzija od $\mathcal{L}$ kratnosti jedan, ima veze s *Minkowskijevom nedegeneriranošću i* <u>*neizmjerivošću*</u> skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: Cantorova struna $\mathcal{L}_{CS}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Mogućnost dobivanja cijevnih formula (*tube formulas*) za Mink. izmjerive i Mink. nedegenerirane strune, tj. da 1-dimenzionalna Lebesugeova mjera $|A_t|$ bude dobivena s pomoću $\zeta_{\mathcal{L}}$ i potencija od $t > 0$.

Kompleksne dimenzije, izmjerivost i neizmjerivost f. strune

Postojanje *samo jedne* glavne kompleksne dimenzije kratnosti jedan fraktalne strune $\mathcal{L}$, ima veze s *Minkowskijevom izmjerivošću* skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: a-struna $\mathcal{L} = (j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j \geq 1}$, za $a > 0$, tj. $A_{\mathcal{L}} = \{k^{-a} : k \in \mathbb{N}\}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Periodičnost skupa glavnih kompleksnih dimenzija od $\mathcal{L}$ kratnosti jedan, ima veze s *Minkowskijevom nedegeneriranošću i neizmjerivošću* skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: Cantorova struna $\mathcal{L}_{CS}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Mogućnost dobivanja cijevnih formula (*tube formulas*) za Mink. izmjerive i Mink. nedegenerirane strune, tj. da 1-dimenzionalna Lebesugeova mjera $|A_t|$ bude dobivena s pomoću $\zeta_{\mathcal{L}}$ i potencija od $t > 0$.

Lapidusovo pitanje još od početka 1990tih: *Može li se uvesti zeta funkcija ζ_A za bilo koji neprazan kompaktan skup A u $\mathbb{R}^N$, tako da polovi od ζ_A budu kompleksne dimenzije od A?*

Kompleksne dimenzije, izmjerivost i neizmjerivost f. strune

Postojanje *samo jedne* glavne kompleksne dimenzije kratnosti jedan fraktalne strune $\mathcal{L}$, ima veze s *Minkowskijevom izmjerivošću* skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: a-struna $\mathcal{L} = (j^{-a} - (j+1)^{-a})_{j \geq 1}$, za $a > 0$, tj. $A_{\mathcal{L}} = \{k^{-a} : k \in \mathbb{N}\}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Periodičnost skupa glavnih kompleksnih dimenzija od $\mathcal{L}$ kratnosti jedan, ima veze s *Minkowskijevom nedegeneriranošću i neizmjerivošću* skupa $A_{\mathcal{L}}$. Primjer: Cantorova struna $\mathcal{L}_{CS}$. (Karakterizacija: Lapidus 1991.)

Mogućnost dobivanja cijevnih formula (*tube formulas*) za Mink. izmjerive i Mink. nedegenerirane strune, tj. da 1-dimenzionalna Lebesugeova mjera $|A_t|$ bude dobivena s pomoću $\zeta_{\mathcal{L}}$ i potencija od $t > 0$.

Lapidusovo pitanje još od početka 1990tih: *Može li se uvesti zeta funkcija ζ_A za bilo koji neprazan kompaktan skup A u $\mathbb{R}^N$, tako da polovi od ζ_A budu kompleksne dimenzije od A?*

Povijest pojma dimenzije: $\dim A \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{C}$ (pa čak i < 0).

Lapidusovo otkriće zeta funkcije kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^N$

Lapidus (Catania, 2009.) Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ bilo koji neprazan *kompaktan* skup. Definiramo razdaljinsku zeta funkciju (distance zeta function) od A sa

$$\zeta_A(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

gdje je $\delta > 0$ bilo koji. Polovi od ζ_A ne ovise o izboru δ.

Lapidusovo otkriće zeta funkcije kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^N$

Lapidus (Catania, 2009.) Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ bilo koji neprazan *kompaktan* skup. Definiramo razdaljinsku zeta funkciju (distance zeta function) od A sa

$$\zeta_A(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

gdje je $\delta > 0$ bilo koji. Polovi od ζ_A ne ovise o izboru δ.

- Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B A\}$ i $\overline{\dim}_B A = D(\zeta_A)$ (absc. aps. konv. integrala). Dokaz iz Harvey-Polkingova tm.

Lapidusovo otkriće zeta funkcije kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^N$

Lapidus (Catania, 2009.) Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ bilo koji neprazan *kompaktan* skup. Definiramo razdaljinsku zeta funkciju (distance zeta function) od A sa

$$\zeta_A(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

gdje je $\delta > 0$ bilo koji. Polovi od ζ_A ne ovise o izboru δ.

- Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B A\}$ i $\overline{\dim}_B A = D(\zeta_A)$ (absc. aps. konv. integrala). Dokaz iz Harvey-Polkingova tm.
- Iz $D = \dim_B A$ i $\mathcal{M}^{*D}(A) > 0$ slijedi $\lim_{s \to D^+} \zeta_A(s) = +\infty$.

Lapidusovo otkriće zeta funkcije kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^N$

Lapidus (Catania, 2009.) Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ bilo koji neprazan *kompaktan* skup. Definiramo razdaljinsku zeta funkciju (distance zeta function) od A sa

$$\zeta_A(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

gdje je $\delta > 0$ bilo koji. Polovi od ζ_A ne ovise o izboru δ.

- Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B A\}$ i $\overline{\dim}_B A = D(\zeta_A)$ (absc. aps. konv. integrala). Dokaz iz Harvey-Polkingova tm.
- Iz $D = \dim_B A$ i $\mathcal{M}^{*D}(A) > 0$ slijedi $\lim_{s \to D^+} \zeta_A(s) = +\infty$.

Primjer. Neka je $\mathcal{L}$ f. struna i $A = A_{\mathcal{L}}$. Za bilo koji $\delta > \ell_1/2$ vrijedi

$$\zeta_{A_{\mathcal{L}}}(s) = \frac{2^{1-s}}{s} \zeta_{\mathcal{L}}(s) + 2\frac{\delta^s}{s}$$

Lapidusovo otkriće zeta funkcije kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^N$

Lapidus (Catania, 2009.) Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ bilo koji neprazan *kompaktan* skup. Definiramo razdaljinsku zeta funkciju (distance zeta function) od A sa

$$\zeta_A(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

gdje je $\delta > 0$ bilo koji. Polovi od ζ_A ne ovise o izboru δ.

- Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B A\}$ i $\overline{\dim}_B A = D(\zeta_A)$ (absc. aps. konv. integrala). Dokaz iz Harvey-Polkingova tm.
- Iz $D = \dim_B A$ i $\mathcal{M}^{*D}(A) > 0$ slijedi $\lim_{s \to D^+} \zeta_A(s) = +\infty$.

Primjer. Neka je $\mathcal{L}$ f. struna i $A = A_{\mathcal{L}}$. Za bilo koji $\delta > \ell_1/2$ vrijedi

$$\zeta_{A_{\mathcal{L}}}(s) = \frac{2^{1-s}}{s} \zeta_{\mathcal{L}}(s) + 2\frac{\delta^s}{s}$$

Cijevnu zeta funkciju (tube zeta function) skupa A definiramo sa:

$$\tilde{\zeta}_A(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\delta t^{s-N-1} |A_t| \, \mathrm{d}t.$$

Lapidusovo otkriće zeta funkcije kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^N$

Lapidus (Catania, 2009.) Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ bilo koji neprazan *kompaktan* skup. Definiramo razdaljinsku zeta funkciju (distance zeta function) od A sa

$$\zeta_A(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

gdje je $\delta > 0$ bilo koji. Polovi od ζ_A ne ovise o izboru δ.

- Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B A\}$ i $\overline{\dim}_B A = D(\zeta_A)$ (absc. aps. konv. integrala). Dokaz iz Harvey-Polkingova tm.
- Iz $D = \dim_B A$ i $\mathcal{M}^{*D}(A) > 0$ slijedi $\lim_{s \to D^+} \zeta_A(s) = +\infty$.

Primjer. Neka je $\mathcal{L}$ f. struna i $A = A_{\mathcal{L}}$. Za bilo koji $\delta > \ell_1/2$ vrijedi

$$\zeta_{A_{\mathcal{L}}}(s) = \frac{2^{1-s}}{s} \zeta_{\mathcal{L}}(s) + 2\frac{\delta^s}{s}$$

Cijevnu zeta funkciju (tube zeta function) skupa A definiramo sa:

$$\tilde{\zeta}_A(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\delta t^{s-N-1} |A_t| \, \mathrm{d}t.$$

Vrijedi: $\zeta_A(s) = \delta^{s-N} |A_\delta| + (N - s) \tilde{\zeta}_A(s)$.

Svojstva razdaljinske zeta funkcije kompaktnih skupova

Svojstvo konjugiranja:

$$\overline{\zeta_A(s)} = \zeta_A(\overline{s})$$

Posebno, **polovi** od ζ_A, koji su izvan realne osi, dolaze u konjugirano kompleksnim parovima (ako je s_0 pol, onda je i $\overline{s}_0$). Isto tako i **bitni singulariteti** od ζ_A. **Meromorfno proširenje** od ζ_A na *domenu* (povezan otvoren podskup) od $\mathbb{C}$ možemo proširiti do domene koja je simetrična s obzirom na realnu os.

Svojstva razdaljinske zeta funkcije kompaktnih skupova

Svojstvo konjugiranja:

$$\overline{\zeta_A(s)} = \zeta_A(\overline{s})$$

Posebno, **polovi** od ζ_A, koji su izvan realne osi, dolaze u konjugirano kompleksnim parovima (ako je s_0 pol, onda je i $\overline{s}_0$). Isto tako i **bitni singulariteti** od ζ_A. **Meromorfno proširenje** od ζ_A na *domenu* (povezan otvoren podskup) od $\mathbb{C}$ možemo proširiti do domene koja je simetrična s obzirom na realnu os.

(LRŽ 2017.):

Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ omeđen i $D = \dim_B A < N$, te neka je ζ_A meromorfno proširiva do povezanog okoliša od D.

- Ako je A Minkowski nedeg., onda je D jednostavan pol i

$$(N-D)\mathcal{M}_*^D(A) \leq \mathrm{res}(\zeta_A, D) \leq (N-D)\mathcal{M}^{*D}(A)$$

  Residuum ne ovisi o izboru $\delta > 0$.

Svojstva razdaljinske zeta funkcije kompaktnih skupova

Svojstvo konjugiranja:

$$\overline{\zeta_A(s)} = \zeta_A(\overline{s})$$

Posebno, **polovi** od ζ_A, koji su izvan realne osi, dolaze u konjugirano kompleksnim parovima (ako je s_0 pol, onda je i $\overline{s}_0$). Isto tako i **bitni singulariteti** od ζ_A. **Meromorfno proširenje** od ζ_A na *domenu* (povezan otvoren podskup) od $\mathbb{C}$ možemo proširiti do domene koja je simetrična s obzirom na realnu os.

(LRŽ 2017.):

Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ omeđen i $D = \dim_B A < N$, te neka je ζ_A meromorfno proširiva do povezanog okoliša od D.

- Ako je A Minkowski nedeg., onda je D jednostavan pol i

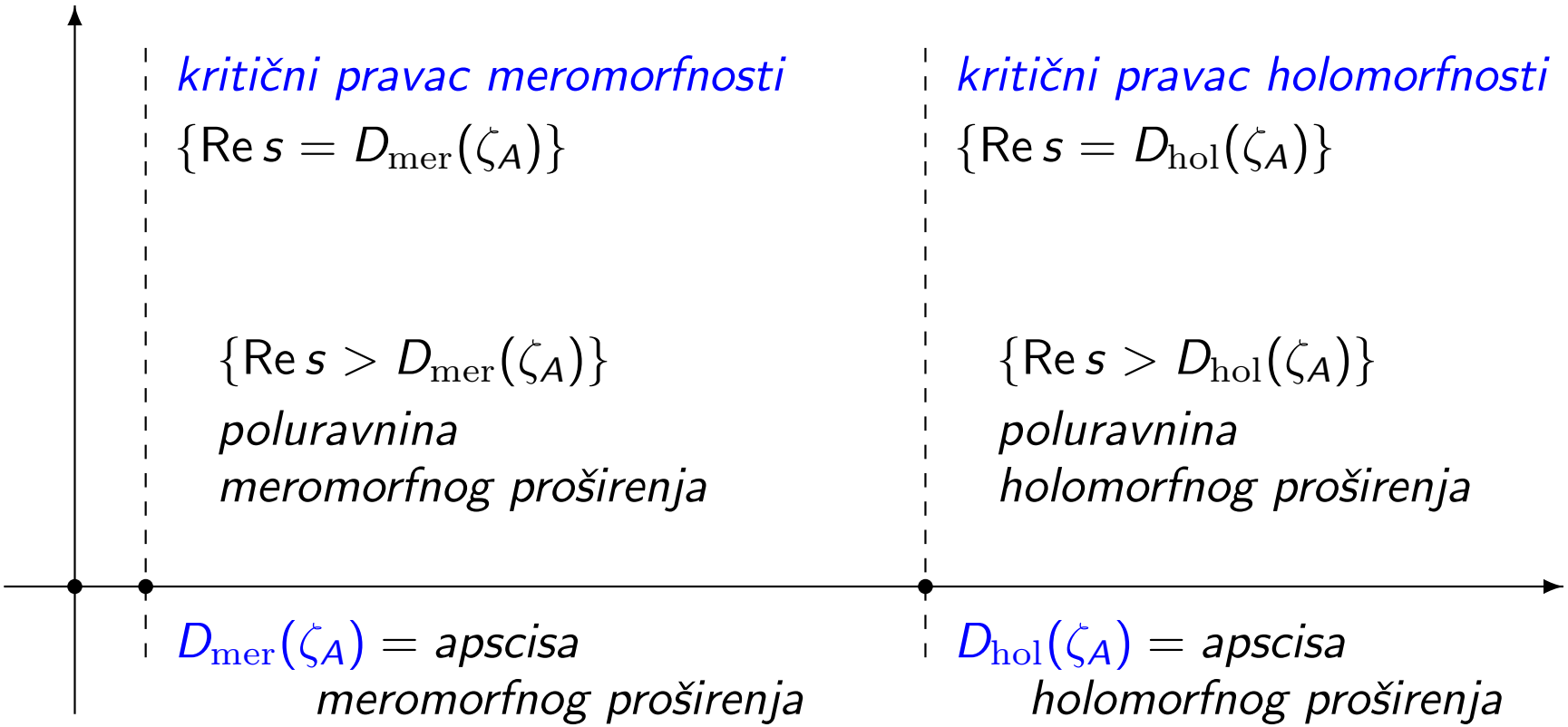
  $$(N-D)\mathcal{M}_*^D(A) \leq \operatorname{res}(\zeta_A, D) \leq (N-D)\mathcal{M}^{*D}(A)$$

  Residuum ne ovisi o izboru $\delta > 0$.
- Ako je skup A Minkowski izmjeriv, onda je D jednostavan pol i

  $$\operatorname{res}(\zeta_A, D) = (N-D)\mathcal{M}^D(A)$$

Apscise holomorfnog i meromorfnog proširenja od ζ_A

Nekoliko definicija:



Vrijedi $D_{\mathrm{mer}}(\zeta_A) \leq D_{\mathrm{hol}}(\zeta_A) \leq D(\zeta_A)$.

Dovoljni uvjeti za meromorfnu proširivost od ζ_A

(LRŽ 2017.):

- Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ t.d. je $|A_t| = t^{N-D}(G(\ln t^{-1}) + O(t^\alpha))$ kad $t \to 0^+$, gdje su $D \in [0, N)$, $\alpha > 0$ i $G : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ je nekonstantna T-periodička. Onda je $D = \dim_B A$,

$$\mathcal{M}_*^D(A) = \min G, \quad \mathcal{M}^{*D}(A) = \max G$$

$D_{\mathrm{mer}}(\zeta_A) \leq D - \alpha$, D je jednostavan pol od ζ_A i

$$\mathrm{res}(\zeta_A, D) = (N - D) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T G(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Posebno, skup A je Minkowski nedegeneriran i neizmjeriv.

Dovoljni uvjeti za meromorfnu proširivost od ζ_A

(LRŽ 2017.):

- Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ t.d. je $|A_t| = t^{N-D}(G(\ln t^{-1}) + O(t^\alpha))$ kad $t \to 0^+$, gdje su $D \in [0, N)$, $\alpha > 0$ i $G : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ je nekonstantna T-periodička. Onda je $D = \dim_B A$,

$$\mathcal{M}_*^D(A) = \min G, \quad \mathcal{M}^{*D}(A) = \max G$$

$D_{\mathrm{mer}}(\zeta_A) \leq D - \alpha$, D je jednostavan pol od ζ_A i

$$\mathrm{res}(\zeta_A, D) = (N - D) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T G(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Posebno, skup A je Minkowski nedegeneriran i neizmjeriv.

Sve glavne kompleksne dimenzije od A su

$$\dim_{PC} A = \left\{ s_k = D + \frac{2\pi}{T}\mathrm{i}k : k \in \mathbb{Z},\ \hat{G}_0(\frac{k}{T}) \neq 0 \right\}$$

gdje je $G_0(\tau) \stackrel{def}{=} G(\tau) \cdot 1_{[0,T]}(\tau)$, a $\hat{G}_0$ je Fourierov transformat od G_0, $\hat{G}_0(t) = \int_0^T \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t\tau} G(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Dovoljni uvjeti za meromorfnu proširivost od ζ_A (nastavak)

- Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^N$ takav da je

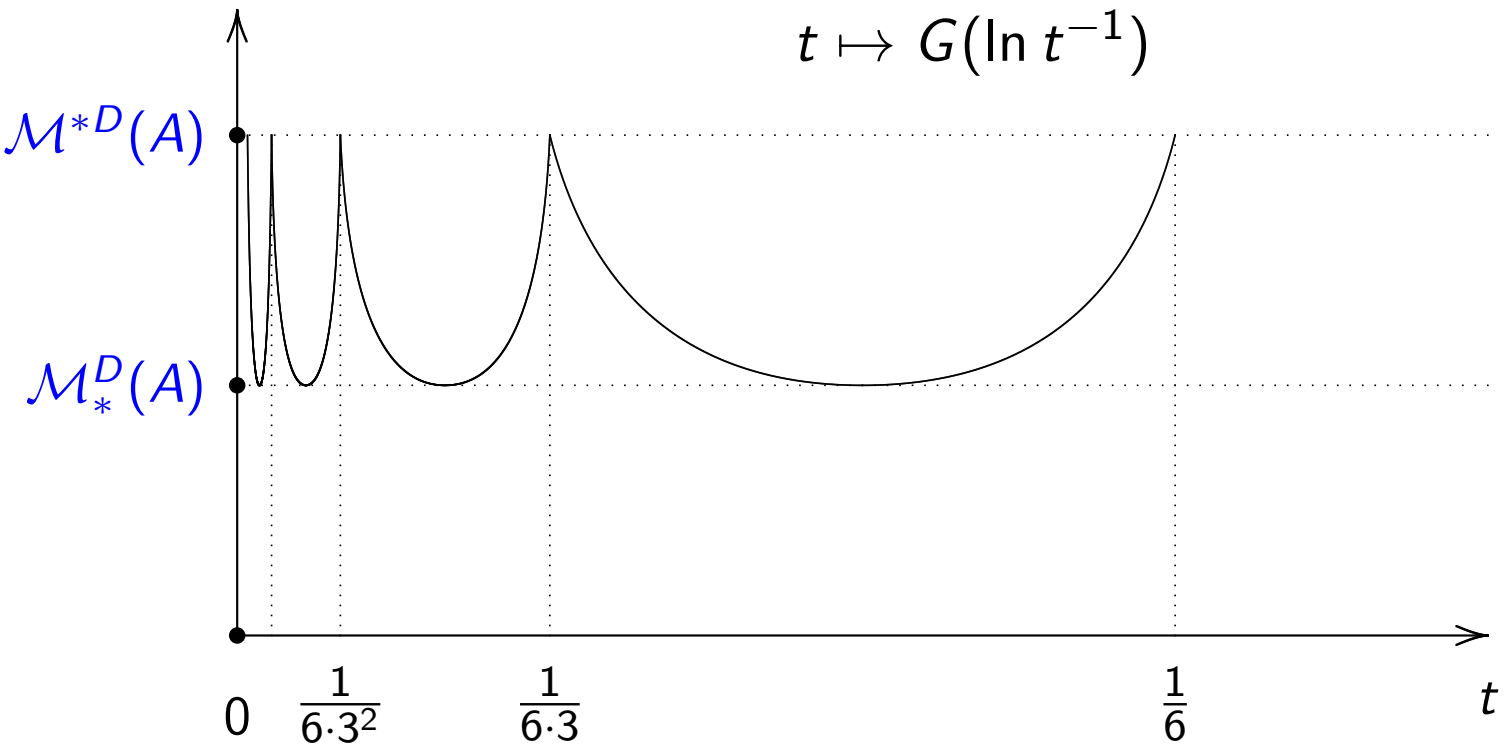
$$|A_t| = t^{N-D}(M + O(t^\alpha)) \quad \text{kad } t \to 0^+,$$

za neke $D \in [0, N)$ i $0 < M < +\infty$. Onda je $\mathcal{M}^D(A) = M$ i A je Minkowski izmjeriv, $D = \dim_B A$ i D je pol prvog reda od ζ_A, te je

$$D_{\mathrm{mer}}(\zeta_A) \leq D - \alpha, \quad \mathrm{res}(\zeta_A, D) = (N - D) \cdot M$$

D je jedini pol od ζ_A u desnoj poluravnini $\{\mathrm{Re}\, s > D - \alpha\}$

Oscilatorni dio cijevne funkcije $t \mapsto |A_t|$ Cantorovog skupa



Slika: Oscilatorna priroda funkcije $G(\ln t^{-1})$ koja se pojavljuje u cijevnoj funkciji $t \mapsto |A_t| = t^{1-D}(G(\ln t^{-1}) + O(t^D))$ blizu $t = 0$ za ternarni Cantorov skup $A = C^{(1/3)}$, gdje je $D = \dim_B A = \log_3 2$.

Funkcija $G(\tau)$ je periodička s periodom $T = \ln 3$.

Ekvivalentno tome, funkcija $G_1(\tau) = G(\ln t^{-1})$ je multiplikativno periodička, tj. $G_1(3^k\tau) = G_1(\tau)$ za sve $k \in \mathbb{Z}$ i $\tau > 0$ (vrijednost $P = \mathrm{e}^T = 3$ je multiplikativni period od G_1).

Tenzorski produkt i disjunktna unija fraktalnih struna

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j \geq 1}$ definiramo *duljinu strune* $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j$.

Tenzorski produkt i disjunktna unija fraktalnih struna

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ definiramo *duljinu strune* $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j$.
Tenzorski produkt $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ fraktalnih struna $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ sastoji se od svih mogućih umnožaka elemenata struna, računajući i kratnost umnožaka. To je također fraktalna struna i vrijedi $|\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2| = |\mathcal{L}_1| \cdot |\mathcal{L}_2|$,

$$\zeta_{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2}(s) = \zeta_{\mathcal{L}_1}(s) \cdot \zeta_{\mathcal{L}_2}(s) \quad \text{za dovoljno veliki } \operatorname{Re} s$$

Tenzorski produkt i disjunktna unija fraktalnih struna

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ definiramo *duljinu strune* $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j$. Tenzorski produkt $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ fraktalnih struna $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ sastoji se od svih mogućih umnožaka elemenata struna, računajući i kratnost umnožaka. To je također fraktalna struna i vrijedi $|\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2| = |\mathcal{L}_1| \cdot |\mathcal{L}_2|$,

$$\zeta_{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2}(s) = \zeta_{\mathcal{L}_1}(s) \cdot \zeta_{\mathcal{L}_2}(s) \quad \text{za dovoljno veliki } \operatorname{Re} s$$

Pretpostavimo da je zadan slijed $(\mathcal{L}_k)_{k\geq 1}$, f. struna t.d. $\sum_k |\mathcal{L}_k| < +\infty$. Disjunktna unija $\sqcup_k \mathcal{L}_k$ fraktalnih struna $\mathcal{L}_k$ je f. struna čiji elementi su članovi obične unije struna. Svaki član ima kratnost koja je zbroj kratnosti u svakoj f. struni. Budući da $|\mathcal{L}_k| \to 0$ kad $k \to \infty$, onda je zbroj tih kratnosti za svaki odabrani $\ell \in \sqcup_k \mathcal{L}_k$ konačan. Jasno je da je $|\sqcup_k \mathcal{L}_k| = \sum_k |\mathcal{L}_k|$ i

$$\zeta_{\sqcup_k \mathcal{L}_k}(s) = \sum_k \zeta_{\mathcal{L}_k}(s) \quad \text{za dovoljno veliki } \operatorname{Re} s$$

Tenzorski produkt i disjunktna unija fraktalnih struna

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ definiramo *duljinu strune* $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j$. Tenzorski produkt $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ fraktalnih struna $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ sastoji se od svih mogućih umnožaka elemenata struna, računajući i kratnost umnožaka. To je također fraktalna struna i vrijedi $|\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2| = |\mathcal{L}_1| \cdot |\mathcal{L}_2|$,

$$\zeta_{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2}(s) = \zeta_{\mathcal{L}_1}(s) \cdot \zeta_{\mathcal{L}_2}(s) \quad \text{za dovoljno veliki } \operatorname{Re} s$$

Pretpostavimo da je zadan slijed $(\mathcal{L}_k)_{k\geq 1}$, f. struna t.d. $\sum_k |\mathcal{L}_k| < +\infty$. Disjunktna unija $\sqcup_k \mathcal{L}_k$ fraktalnih struna $\mathcal{L}_k$ je f. struna čiji elementi su članovi obične unije struna. Svaki član ima kratnost koja je zbroj kratnosti u svakoj f. struni. Budući da $|\mathcal{L}_k| \to 0$ kad $k \to \infty$, onda je zbroj tih kratnosti za svaki odabrani $\ell \in \sqcup_k \mathcal{L}_k$ konačan. Jasno je da je $|\sqcup_k \mathcal{L}_k| = \sum_k |\mathcal{L}_k|$ i

$$\zeta_{\sqcup_k \mathcal{L}_k}(s) = \sum_k \zeta_{\mathcal{L}_k}(s) \quad \text{za dovoljno veliki } \operatorname{Re} s$$

Vrijedi $\mathcal{L}_1 \otimes (\mathcal{L}_2 \sqcup \mathcal{L}_3) = (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \sqcup (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_3)$.

Tenzorski produkt i disjunktna unija fraktalnih struna

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ definiramo *duljinu strune* $|\mathcal{L}| = \sum_j \ell_j$.
Tenzorski produkt $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ fraktalnih struna $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ sastoji se od svih mogućih umnožaka elemenata struna, računajući i kratnost umnožaka. To je također fraktalna struna i vrijedi $|\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2| = |\mathcal{L}_1| \cdot |\mathcal{L}_2|$,

$$\zeta_{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2}(s) = \zeta_{\mathcal{L}_1}(s) \cdot \zeta_{\mathcal{L}_2}(s) \quad \text{za dovoljno veliki } \operatorname{Re} s$$

Pretpostavimo da je zadan slijed $(\mathcal{L}_k)_{k\geq 1}$, f. struna t.d. $\sum_k |\mathcal{L}_k| < +\infty$.
Disjunktna unija $\sqcup_k \mathcal{L}_k$ fraktalnih struna $\mathcal{L}_k$ je f. struna čiji elementi su članovi obične unije struna. Svaki član ima kratnost koja je zbroj kratnosti u svakoj f. struni. Budući da $|\mathcal{L}_k| \to 0$ kad $k \to \infty$, onda je zbroj tih kratnosti za svaki odabrani $\ell \in \sqcup_k \mathcal{L}_k$ konačan. Jasno je da je $|\sqcup_k \mathcal{L}_k| = \sum_k |\mathcal{L}_k|$ i

$$\zeta_{\sqcup_k \mathcal{L}_k}(s) = \sum_k \zeta_{\mathcal{L}_k}(s) \quad \text{za dovoljno veliki } \operatorname{Re} s$$

Vrijedi $\mathcal{L}_1 \otimes (\mathcal{L}_2 \sqcup \mathcal{L}_3) = (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \sqcup (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_3)$.
Skup **L** svih fraktalnih struna $\mathcal{L}$ je poluprsten (semiring) bez nule i jedinice.

Generiranje bitnih singulariteta geometrijskih zeta funkcija

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ i $c > 0$ definiramo f. strunu $c\mathcal{L} = (c\ell_j)_{j\geq 1}$. Vrijedi $\zeta_{c\mathcal{L}}(s) = c^s \zeta_{\mathcal{L}}(s)$.

Generiranje bitnih singulariteta geometrijskih zeta funkcija

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ i $c > 0$ definiramo f. strunu $c\mathcal{L} = (c\ell_j)_{j\geq 1}$. Vrijedi $\zeta_{c\mathcal{L}}(s) = c^s \zeta_{\mathcal{L}}(s)$.

Za fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ definiramo novu f. strunu $\mathcal{L}^k := \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$. Vrijedi $\zeta_{\mathcal{L}^k}(s) = \zeta_{\mathcal{L}}(s)^k$.

Generiranje bitnih singulariteta geometrijskih zeta funkcija

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ i $c > 0$ definiramo f. strunu $c\mathcal{L} = (c\ell_j)_{j\geq 1}$. Vrijedi $\zeta_{c\mathcal{L}}(s) = c^s \zeta_{\mathcal{L}}(s)$.

Za fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ definiramo novu f. strunu $\mathcal{L}^k := \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$. Vrijedi $\zeta_{\mathcal{L}^k}(s) = \zeta_{\mathcal{L}}(s)^k$.

Neka je $\mathcal{L}$ t.d. je $\zeta_{\mathcal{L}}$ holomorfno proširiva do $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus S$, gdje je $S =$ skup izoliranih singulariteta od $\zeta_{\mathcal{L}}$. Za red potencija $f(x) := \sum_k c_k x^k$ t.d. $f(|\mathcal{L}|) < +\infty$, gdje su $c_k > 0$, $k \geq 1$, definiramo red potencija fraktalnih struna (novu f. strunu):

$$f(\mathcal{L}) \stackrel{def}{=} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} c_k \mathcal{L}^k = c_1\mathcal{L} \sqcup c_2\mathcal{L}^2 \sqcup c_3\mathcal{L}^3 \sqcup \ldots$$

Generiranje bitnih singulariteta geometrijskih zeta funkcija

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ i $c > 0$ definiramo f. strunu $c\mathcal{L} = (c\ell_j)_{j\geq 1}$. Vrijedi $\zeta_{c\mathcal{L}}(s) = c^s \zeta_{\mathcal{L}}(s)$.

Za fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ definiramo novu f. strunu $\mathcal{L}^k := \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$. Vrijedi $\zeta_{\mathcal{L}^k}(s) = \zeta_{\mathcal{L}}(s)^k$.

Neka je $\mathcal{L}$ t.d. je $\zeta_{\mathcal{L}}$ holomorfno proširiva do $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus S$, gdje je $S =$ skup izoliranih singulariteta od $\zeta_{\mathcal{L}}$. Za red potencija $f(x) := \sum_k c_k x^k$ t.d. $f(|\mathcal{L}|) < +\infty$, gdje su $c_k > 0$, $k \geq 1$, definiramo red potencija fraktalnih struna (novu f. strunu):

$$f(\mathcal{L}) \stackrel{def}{=} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} c_k \mathcal{L}^k = c_1\mathcal{L} \sqcup c_2\mathcal{L}^2 \sqcup c_3\mathcal{L}^3 \sqcup \ldots$$

Vrijedi $|f(\mathcal{L})| = f(|\mathcal{L}|) < +\infty$, pa je $f(\mathcal{L})$ fraktalna struna, te je

$$\zeta_{f(\mathcal{L})}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^s \zeta_{\mathcal{L}}(s)^k$$

Generiranje bitnih singulariteta geometrijskih zeta funkcija

Za f. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ i $c > 0$ definiramo f. strunu $c\mathcal{L} = (c\ell_j)_{j\geq 1}$. Vrijedi $\zeta_{c\mathcal{L}}(s) = c^s \zeta_{\mathcal{L}}(s)$.
Za fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ definiramo novu f. strunu $\mathcal{L}^k := \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$. Vrijedi $\zeta_{\mathcal{L}^k}(s) = \zeta_{\mathcal{L}}(s)^k$.
Neka je $\mathcal{L}$ t.d. je $\zeta_{\mathcal{L}}$ holomorfno proširiva do $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus S$, gdje je $S =$ skup izoliranih singulariteta od $\zeta_{\mathcal{L}}$. Za red potencija $f(x) := \sum_k c_k x^k$ t.d. $f(|\mathcal{L}|) < +\infty$, gdje su $c_k > 0$, $k \geq 1$, definiramo red potencija fraktalnih struna (novu f. strunu):

$$f(\mathcal{L}) \stackrel{def}{=} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} c_k \mathcal{L}^k = c_1\mathcal{L} \sqcup c_2\mathcal{L}^2 \sqcup c_3\mathcal{L}^3 \sqcup \ldots$$

Vrijedi $|f(\mathcal{L})| = f(|\mathcal{L}|) < +\infty$, pa je $f(\mathcal{L})$ fraktalna struna, te je

$$\zeta_{f(\mathcal{L})}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^s \zeta_{\mathcal{L}}(s)^k$$

Prema Weierstrassovom M-testu, za $c_k = 1/k!$ red konvergira na skupu $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus S$. Ako je s_0 pol reda n od $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ onda je s_0 pol reda nk od $\zeta_{\mathcal{L}}(s)^k$ za sve $k \geq 1$, dakle bitni singularitet od $\zeta_{f(\mathcal{L})}(s)$.

3. dio

Relativni fraktalni bubnjevi

Ključne riječi:
RFD, relativni Minkowskijev sadržaj, negativna box (ili Minkowskijeva) dimenzija RFD-a, baždarne funkcije, relativne zeta funkcije (razdaljinske i cijevne), glavne kompleksne dimenzije RFD-a, kvaziperiodični skupovi, spektralne zeta funkcije, Weylova asimptotika, spektralna funkcija, inverzni spektralni problem, meromorfna proširenja, prošireni singularni skup, Weierstrassova funkcija

Relativni fraktalni bubnjevi (Ž 2006., LRŽ 2017.)

Relativni fraktalni bubanj (relative fractal drum, RFD) (A, Ω) u $\mathbb{R}^N$ je poredani dvojac u kojem je $A \neq \emptyset$ podskup (ne nužno omeđen) u $\mathbb{R}^N$, a Ω je otvoren skup konačne N-dimenzionalne L-mjere: $|\Omega|_N < +\infty$, tako da je $\Omega \subset A_\delta$ za neki $\delta > 0$.

Relativni fraktalni bubnjevi (Ž 2006., LRŽ 2017.)

Relativni fraktalni bubanj (relative fractal drum, RFD) (A, Ω) u $\mathbb{R}^N$ je poredani dvojac u kojem je $A \neq \emptyset$ podskup (ne nužno omeđen) u $\mathbb{R}^N$, a Ω je otvoren skup konačne N-dimenzionalne L-mjere: $|\Omega|_N < +\infty$, tako da je $\Omega \subset A_\delta$ za neki $\delta > 0$. Za bilo koji $r \in \mathbb{R}$ definiramo gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj RFD-a:

$$\mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t \cap \Omega|_N}{t^{N-r}} \quad \text{(Ž., RAE 2006, za } r \geq 0\text{)}$$

Relativni fraktalni bubnjevi (Ž 2006., LRŽ 2017.)

Relativni fraktalni bubanj (relative fractal drum, RFD) (A, Ω) u $\mathbb{R}^N$ je poredani dvojac u kojem je $A \neq \emptyset$ podskup (ne nužno omeđen) u $\mathbb{R}^N$, a Ω je otvoren skup konačne N-dimenzionalne L-mjere: $|\Omega|_N < +\infty$, tako da je $\Omega \subset A_\delta$ za neki $\delta > 0$. Za bilo koji $r \in \mathbb{R}$ definiramo gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj RFD-a:

$$\mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t \cap \Omega|_N}{t^{N-r}} \quad \text{(Ž., RAE 2006, za } r \geq 0\text{)}$$

Gornja Minkowskijeva dimenzija RFD-a:

$$\overline{\dim}_B(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \inf\{r \in \mathbb{R} : \mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) = 0\} \in [-\infty, N]$$

Relativni fraktalni bubnjevi (Ž 2006., LRŽ 2017.)

Relativni fraktalni bubanj (relative fractal drum, RFD) (A, Ω) u $\mathbb{R}^N$ je poredani dvojac u kojem je $A \neq \emptyset$ podskup (ne nužno omeđen) u $\mathbb{R}^N$, a Ω je otvoren skup konačne N-dimenzionalne L-mjere: $|\Omega|_N < +\infty$, tako da je $\Omega \subset A_\delta$ za neki $\delta > 0$. Za bilo koji $r \in \mathbb{R}$ definiramo gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj RFD-a:

$$\mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t \cap \Omega|_N}{t^{N-r}} \quad \text{(Ž., RAE 2006, za } r \geq 0\text{)}$$

Gornja Minkowskijeva dimenzija RFD-a:

$$\overline{\dim}_B(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \inf\{r \in \mathbb{R} : \mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) = 0\} \in [-\infty, N]$$

Analogno definiramo $\mathcal{M}_*^r(A, \Omega)$ i $\underline{\dim}_B(A, \Omega)$, te pojmove *Minkowskijeve izmjerivosti* i *nedegeneriranosti* RFD-a (A, Ω).

Relativni fraktalni bubnjevi (Ž 2006., LRŽ 2017.)

Relativni fraktalni bubanj (relative fractal drum, RFD) (A, Ω) u $\mathbb{R}^N$ je poredani dvojac u kojem je $A \neq \emptyset$ podskup (ne nužno omeđen) u $\mathbb{R}^N$, a Ω je otvoren skup konačne N-dimenzionalne L-mjere: $|\Omega|_N < +\infty$, tako da je $\Omega \subset A_\delta$ za neki $\delta > 0$. Za bilo koji $r \in \mathbb{R}$ definiramo gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj RFD-a:

$$\mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t \cap \Omega|_N}{t^{N-r}} \quad \text{(Ž., RAE 2006, za } r \geq 0)$$

Gornja Minkowskijeva dimenzija RFD-a:

$$\overline{\dim}_B(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \inf\{r \in \mathbb{R} : \mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) = 0\} \in [-\infty, N]$$

Analogno definiramo $\mathcal{M}_*^r(A, \Omega)$ i $\underline{\dim}_B(A, \Omega)$, te pojmove *Minkowskijeve izmjerivosti* i *nedegeneriranosti* RFD-a (A, Ω).

Primjer. F. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j \geq 1}$ možemo poistovjetiti s RFD-om (A, Ω) gdje je $A = \{a_k\}_{k \geq 1}$ geometrijska realizacija strune i $\Omega = (0, |\mathcal{L}|)$; ili sa $(\partial\Omega, \Omega)$, gdje je $\Omega = \cup_j I_j$ disjunktna unija otvorenih intervala i $|I_j| = \ell_j$.

Relativni fraktalni bubnjevi (Ž 2006., LRŽ 2017.)

Relativni fraktalni bubanj (relative fractal drum, RFD) (A, Ω) u $\mathbb{R}^N$ je poredani dvojac u kojem je $A \neq \emptyset$ podskup (ne nužno omeđen) u $\mathbb{R}^N$, a Ω je otvoren skup konačne N-dimenzionalne L-mjere: $|\Omega|_N < +\infty$, tako da je $\Omega \subset A_\delta$ za neki $\delta > 0$. Za bilo koji $r \in \mathbb{R}$ definiramo gornji r-dimenzionalni Minkowskijev sadržaj RFD-a:

$$\mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \limsup_{t \to 0^+} \frac{|A_t \cap \Omega|_N}{t^{N-r}} \quad \text{(Ž., RAE 2006, za } r \geq 0)$$

Gornja Minkowskijeva dimenzija RFD-a:

$$\overline{\dim}_B(A, \Omega) \stackrel{def}{=} \inf\{r \in \mathbb{R} : \mathcal{M}^{*r}(A, \Omega) = 0\} \in [-\infty, N]$$

Analogno definiramo $\mathcal{M}_*^r(A, \Omega)$ i $\underline{\dim}_B(A, \Omega)$, te pojmove *Minkowskijeve izmjerivosti* i *nedegeneriranosti* RFD-a (A, Ω).

Primjer. F. strunu $\mathcal{L} = (\ell_j)_{j \geq 1}$ možemo poistovjetiti s RFD-om (A, Ω) gdje je $A = \{a_k\}_{k \geq 1}$ geometrijska realizacija strune i $\Omega = (0, |\mathcal{L}|)$; ili sa $(\partial\Omega, \Omega)$, gdje je $\Omega = \cup_j I_j$ disjunktna unija otvorenih intervala i $|I_j| = \ell_j$. Također, za $\lambda > 0$ je $\mathcal{M}^{*r}(\lambda A, \lambda\Omega) = \lambda^r \mathcal{M}^{*r}(A, \Omega)$ za sve $r \in (-\infty, N]$, i slično za $\mathcal{M}_*^r$.

Rezultat Harvey-Polkingovog tipa za RFD-ove

Neka je zadan RFD (A, Ω) t.d. $D = \overline{\dim}_B(A, \Omega) > -\infty$. Onda za sve $\delta > 0$ vrijedi poopćenje Harvey-Polkingova rezultata (Ž. RAE 2006. i LRŽ 2017.):

$$\gamma < N - \overline{\dim}_B(A, \Omega) \quad \Longrightarrow \quad \int_{A_\delta \cap \Omega} d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty$$

Ako postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $\mathcal{M}_*^D(A, \Omega) > 0$, onda vrijedi i obrat.

Rezultat Harvey-Polkingovog tipa za RFD-ove

Neka je zadan RFD (A, Ω) t.d. $D = \overline{\dim}_B(A, \Omega) > -\infty$. Onda za sve $\delta > 0$ vrijedi poopćenje Harvey-Polkingova rezultata (Ž. RAE 2006. i LRŽ 2017.):

$$\gamma < N - \overline{\dim}_B(A, \Omega) \quad \Longrightarrow \quad \int_{A_\delta \cap \Omega} d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty$$

Ako postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $\mathcal{M}_*^D(A, \Omega) > 0$, onda vrijedi i obrat.

Mogućnost da relativna box dimenzija točke može biti < 0 primijetio je nezavisno *Claude Tricot* 2010. Uvijek je $\overline{\dim}_B(A, \Omega) \leq \overline{\dim}_B A$.

Rezultat Harvey-Polkingovog tipa za RFD-ove

Neka je zadan RFD (A, Ω) t.d. $D = \overline{\dim}_B(A, \Omega) > -\infty$. Onda za sve $\delta > 0$ vrijedi poopćenje Harvey-Polkingova rezultata (Ž. RAE 2006. i LRŽ 2017.):

$$\gamma < N - \overline{\dim}_B(A, \Omega) \quad \Longrightarrow \quad \int_{A_\delta \cap \Omega} d(x, A)^{-\gamma} \mathrm{d}x < +\infty$$

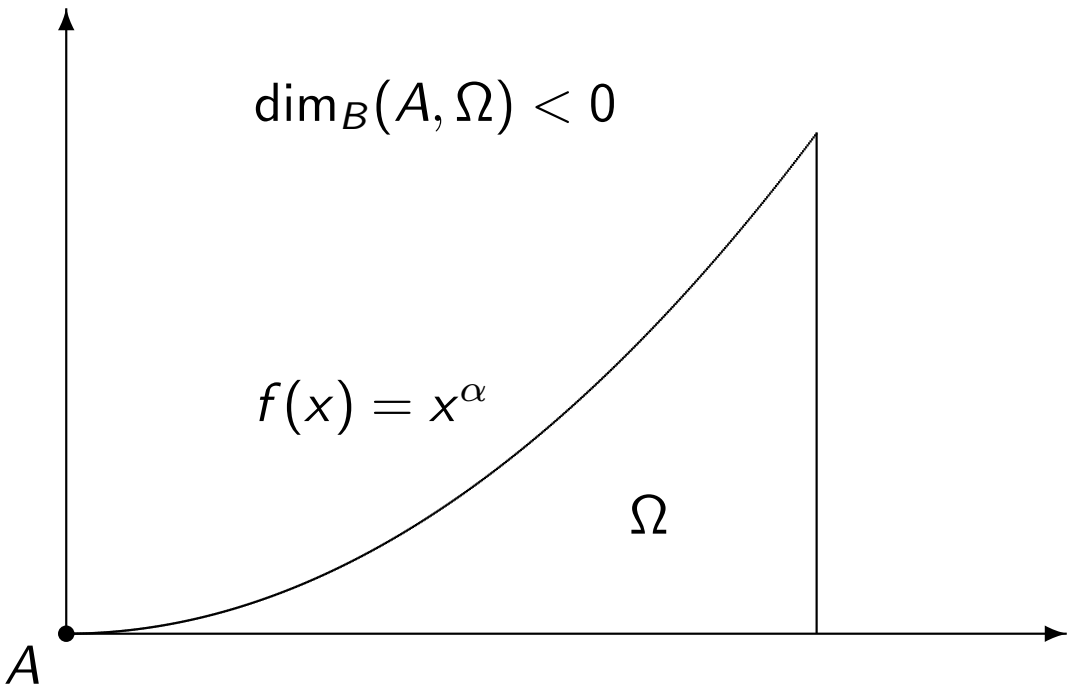
Ako postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $\mathcal{M}_*^D(A, \Omega) > 0$, onda vrijedi i obrat.

Mogućnost da relativna box dimenzija točke može biti < 0 primijetio je nezavisno *Claude Tricot* 2010. Uvijek je $\overline{\dim}_B(A, \Omega) \leq \overline{\dim}_B A$.

Primjer. Neka je je $A = \{(0, 0)\}$,
$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < f(x),\ 0 < x < 1\}$.

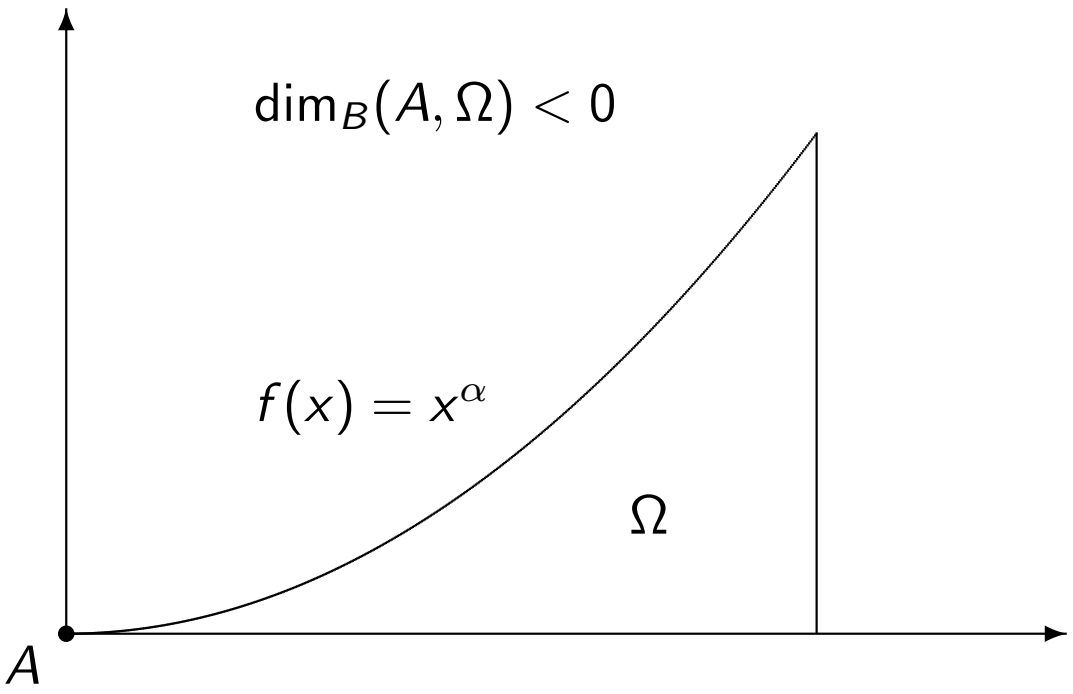
- $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1 \Rightarrow \dim_B(A, \Omega) = 1 - \alpha < 0$ (plosnati RFD)
- $f(x) = \exp(-1/x) \Rightarrow \dim_B(A, \Omega) = -\infty$ (maksimalno plosnati RFD)

Plosnati RFD-ovi



Slika: RFD (A, Ω) s negativnom box-dimenzijom $\dim_B(A, \Omega) = 1 - \alpha < 0$ (ovdje je $\alpha > 1$), radi "plosnatosti" domene Ω kod točke A.

Plosnati RFD-ovi



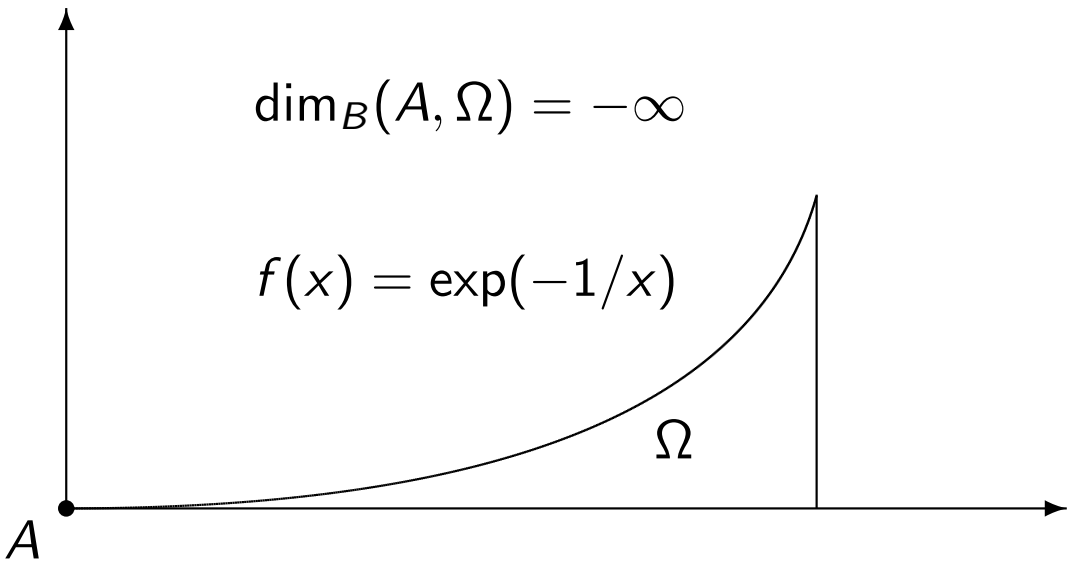
Slika: RFD (A,Ω) s negativnom box-dimenzijom $\dim_B(A,\Omega) = 1-\alpha < 0$ (ovdje je $\alpha > 1$), radi "plosnatosti" domene Ω kod točke A.

Prirodno je definirati plosnatost (flatness) RFD-a (A,Ω) sa

$$\mathfrak{fl}\,(A,\Omega) \stackrel{def}{=} (\overline{\dim}_B(A,\Omega))_-$$

gdje je $(r)_- := \max\{-r, 0\}$

Maksimalno plosnati RFD



Slika: Maksimalno plosnati RFD (A, Ω), tj. s box-dimenzijom $\dim_B(A, \Omega) = -\infty$. Domena Ω je kod točke A maksimalno plosnata.

Možemo zamisliti maksimalno plosnati RFD $(A \times (0,1), \Omega \times (0,1))$ sadržan u $\mathbb{R}^3$, u kojemu skup $A \times (0,1)$ možemo gledati kao oštricu sječiva $\Omega \times (0,1)$.

Relativne zeta funkcije (LRŽ, 2017.)

Razdaljinska zeta funkcija RFD-a (A, Ω), gdje je $\delta > 0$:

$$\zeta_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta \cap \Omega} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B(A, \Omega)\}$ i $\overline{\dim}_B(A, \Omega) = D(\zeta_{A,\Omega})$ (absc. aps. konv. integrala).

Relativne zeta funkcije (LRŽ, 2017.)

Razdaljinska zeta funkcija RFD-a (A, Ω), gdje je $\delta > 0$:

$$\zeta_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta \cap \Omega} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B(A, \Omega)\}$ i $\overline{\dim}_B(A, \Omega) = D(\zeta_{A,\Omega})$ (absc. aps. konv. integrala). Relativna cijevna zeta funkcija:

$$\tilde{\zeta}_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\delta t^{s-N-1} |A_t \cap \Omega| \, \mathrm{d}t$$

Vrijedi slična funkcionalna jednadžba kao prije, koja ih povezuje.

Relativne zeta funkcije (LRŽ, 2017.)

Razdaljinska zeta funkcija RFD-a (A, Ω), gdje je $\delta > 0$:

$$\zeta_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta \cap \Omega} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B(A, \Omega)\}$ i $\overline{\dim}_B(A, \Omega) = D(\zeta_{A,\Omega})$ (absc. aps. konv. integrala). Relativna cijevna zeta funkcija:

$$\tilde{\zeta}_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\delta t^{s-N-1} |A_t \cap \Omega| \, \mathrm{d}t$$

Vrijedi slična funkcionalna jednadžba kao prije, koja ih povezuje. Za $\lambda > 0$ i $\lambda(A, \Omega) \stackrel{def}{=} (\lambda A, \lambda \Omega)$: $\zeta_{\lambda A, \lambda \Omega}(s) = \lambda^s \zeta_{A,\Omega}(s)$.

Relativne zeta funkcije (LRŽ, 2017.)

Razdaljinska zeta funkcija RFD-a (A, Ω), gdje je $\delta > 0$:

$$\zeta_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta \cap \Omega} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

Holomorfna na $\{\mathrm{Re}\, s > \overline{\dim}_B(A, \Omega)\}$ i $\overline{\dim}_B(A, \Omega) = D(\zeta_{A,\Omega})$ (absc. aps. konv. integrala). Relativna cijevna zeta funkcija:

$$\tilde{\zeta}_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\delta t^{s-N-1} |A_t \cap \Omega| \, \mathrm{d}t$$

Vrijedi slična funkcionalna jednadžba kao prije, koja ih povezuje.
Za $\lambda > 0$ i $\lambda(A, \Omega) \stackrel{def}{=} (\lambda A, \lambda \Omega)$: $\zeta_{\lambda A, \lambda \Omega}(s) = \lambda^s \zeta_{A,\Omega}(s)$.
Za disjunktnu uniju RFD-ova $(A_1, \Omega_1) \sqcup (A_2, \Omega_2)$:

$$\zeta_{(A_1,\Omega_1) \sqcup (A_2,\Omega_2)}(s) = \zeta_{A_1,\Omega_1}(s) + \zeta_{A_2,\Omega_2}(s)$$

Relativne zeta funkcije (LRŽ, 2017.)

Razdaljinska zeta funkcija RFD-a (A, Ω), gdje je $\delta > 0$:

$$\zeta_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_{A_\delta \cap \Omega} d(x, A)^{s-N} \mathrm{d}x$$

Holomorfna na $\{\operatorname{Re} s > \overline{\dim}_B(A, \Omega)\}$ i $\overline{\dim}_B(A, \Omega) = D(\zeta_{A,\Omega})$ (absc. aps. konv. integrala). Relativna cijevna zeta funkcija:

$$\tilde{\zeta}_{A,\Omega}(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\delta t^{s-N-1} |A_t \cap \Omega| \, \mathrm{d}t$$

Vrijedi slična funkcionalna jednadžba kao prije, koja ih povezuje.
Za $\lambda > 0$ i $\lambda(A, \Omega) \stackrel{def}{=} (\lambda A, \lambda \Omega)$: $\zeta_{\lambda A, \lambda \Omega}(s) = \lambda^s \zeta_{A,\Omega}(s)$.
Za disjunktnu uniju RFD-ova $(A_1, \Omega_1) \sqcup (A_2, \Omega_2)$:

$$\zeta_{(A_1,\Omega_1) \sqcup (A_2,\Omega_2)}(s) = \zeta_{A_1,\Omega_1}(s) + \zeta_{A_2,\Omega_2}(s)$$

Slično vrijedi i za prebrojive disjunktne unije RFD-ova.

Kompleksne dimenzije generaliziranog Cantorovog RFD-a

Neka je $A = C^{(a)}$, $\Omega = (0,1)$, $G = (a, 1-a)$, $0 < a < 1/2$. Za generalizirani Cantorov Cantorov RFD (A, Ω) vrijedi

$$(A, \Omega) = a \cdot (A, \Omega) \sqcup a \cdot (A, \Omega) \sqcup (\partial G, G)$$

Onda je

$$\zeta_{A,\Omega}(s) = 2 \cdot a^s \zeta_{A,\Omega}(s) + \zeta_{\partial G, G}(s)$$

odakle je, za $\delta > \frac{1-2a}{2}$:

$$\zeta_{A,\Omega}(s) = \frac{\zeta_{\partial G, G}(s)}{1 - 2 \cdot a^s} = \frac{2 \cdot (\frac{1}{2} - a)^s}{s(1 - 2 \cdot a^s)}$$

Glavne kompleksne dimenzije Cantorovog RFD-a (A, Ω) su

$$\dim_{PC}(A, \Omega) = \log_{1/a} 2 + \frac{2\pi}{\ln(1/a)} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Kompleksne dimenzije Sierpińskijevog relativnog saga

Neka je A Sierpińskijev sag, dobiven iz zatvorenog jediničnog kvadrata uzastopnim micanjem srednjih otvorenih kvadrata, a Ω je otvoren jedinični kvadrat. Vrijedi

$$(A, \Omega) = \left(\bigsqcup_{j=1}^{8} 3^{-1}(A, \Omega) \right) \sqcup (\partial G, G)$$

gdje je G srednji od prvih devet kvadrata u Ω.

Kompleksne dimenzije Sierpińskijevog relativnog saga

Neka je A Sierpińskijev sag, dobiven iz zatvorenog jediničnog kvadrata uzastopnim micanjem srednjih otvorenih kvadrata, a Ω je otvoren jedinični kvadrat. Vrijedi

$$(A, \Omega) = \left(\bigsqcup_{j=1}^{8} 3^{-1}(A, \Omega) \right) \sqcup (\partial G, G)$$

gdje je G srednji od prvih devet kvadrata u Ω. Onda za $\delta > \sqrt{2}/6$ vrijedi $\zeta_{A,\Omega}(s) = 8 \cdot 3^{-s} \zeta_{A,\Omega}(s) + \zeta_{\partial G, G}(s)$, tj.

$$\zeta_{A,\Omega}(s) = \frac{\zeta_{\partial G, G}(s)}{1 - 8 \cdot 3^{-s}} = \frac{8 \cdot 6^{-s}}{s(s-1)(1 - 8 \cdot 3^{-s})}$$

Kompleksne dimenzije Sierpińskijevog relativnog saga

Neka je A Sierpińskijev sag, dobiven iz zatvorenog jediničnog kvadrata uzastopnim micanjem srednjih otvorenih kvadrata, a Ω je otvoren jedinični kvadrat. Vrijedi

$$(A, \Omega) = \left(\bigsqcup_{j=1}^{8} 3^{-1}(A, \Omega) \right) \sqcup (\partial G, G)$$

gdje je G srednji od prvih devet kvadrata u Ω. Onda za $\delta > \sqrt{2}/6$ vrijedi $\zeta_{A,\Omega}(s) = 8 \cdot 3^{-s} \zeta_{A,\Omega}(s) + \zeta_{\partial G, G}(s)$, tj.

$$\zeta_{A,\Omega}(s) = \frac{\zeta_{\partial G, G}(s)}{1 - 8 \cdot 3^{-s}} = \frac{8 \cdot 6^{-s}}{s(s-1)(1 - 8 \cdot 3^{-s})}$$

Glavne kompleksne dimenzije Sierpińskijevog RFD-a su

$$\dim_{PC}(A, \Omega) = \log_3 8 + \frac{2\pi}{\ln 3} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Kompleksne dimenzije Sierpińskijevog trokuta

Neka je A Sierpińskijev trokut, dobiven iz zatvorenog jediničnog trokuta uzastopnim micanjem srednjih otvorenih trokuta. Neka je Ω otvoren jedinični trokut. Vidimo da je

$$(A, \Omega) = \frac{1}{2}(A, \Omega) \sqcup \frac{1}{2}(A, \Omega) \sqcup \frac{1}{2}(A, \Omega) \sqcup (\partial G, G)$$

gdje je G srednji od prva četiri trokuta u Ω.

Kompleksne dimenzije Sierpińskijevog trokuta

Neka je A Sierpińskijev trokut, dobiven iz zatvorenog jediničnog trokuta uzastopnim micanjem srednjih otvorenih trokuta. Neka je Ω otvoren jedinični trokut. Vidimo da je

$$(A, \Omega) = \frac{1}{2}(A, \Omega) \sqcup \frac{1}{2}(A, \Omega) \sqcup \frac{1}{2}(A, \Omega) \sqcup (\partial G, G)$$

gdje je G srednji od prva četiri trokuta u Ω. Onda za $\delta > \sqrt{2}/8$ vrijedi $\zeta_{A,\Omega}(s) = \frac{1}{2^s}\zeta_{A,\Omega}(s) + \frac{1}{2^s}\zeta_{A,\Omega}(s) + \frac{1}{2^s}\zeta_{A,\Omega}(s) + \zeta_{\partial G,G}(s)$, tj.

$$\zeta_{A,\Omega}(s) = \frac{\zeta_{\partial G,G}(s)}{1 - 3 \cdot 2^{-s}} = \frac{6(\sqrt{3})^{1-s}2^{-s}}{s(s-1)(1 - 3 \cdot 2^{-s})}$$

Kompleksne dimenzije Sierpińskijevog trokuta

Neka je A Sierpińskijev trokut, dobiven iz zatvorenog jediničnog trokuta uzastopnim micanjem srednjih otvorenih trokuta. Neka je Ω otvoren jedinični trokut. Vidimo da je

$$(A,\Omega) = \frac{1}{2}(A,\Omega) \sqcup \frac{1}{2}(A,\Omega) \sqcup \frac{1}{2}(A,\Omega) \sqcup (\partial G, G)$$

gdje je G srednji od prva četiri trokuta u Ω. Onda za $\delta > \sqrt{2}/8$ vrijedi $\zeta_{A,\Omega}(s) = \frac{1}{2^s}\zeta_{A,\Omega}(s) + \frac{1}{2^s}\zeta_{A,\Omega}(s) + \frac{1}{2^s}\zeta_{A,\Omega}(s) + \zeta_{\partial G,G}(s)$, tj.

$$\zeta_{A,\Omega}(s) = \frac{\zeta_{\partial G,G}(s)}{1-3\cdot 2^{-s}} = \frac{6(\sqrt{3})^{1-s}2^{-s}}{s(s-1)(1-3\cdot 2^{-s})}$$

Glavne kompleksne dimenzije Sierpińskijevog RFD-a su

$$\dim_{PC}(A,\Omega) = \log_2 3 + \frac{2\pi}{\ln 2}\mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Svojstva razdaljinske zeta funkcije RFD-ova

(LRŽ 2017.):

Neka je $D = \dim_B(A, \Omega) < N$, te neka je $\zeta_{A,\Omega}$ meromorfno proširiva do povezanog okoliša od D.

- Ako je RFD (A, Ω) Minkowski nedegeneriran, onda je D jednostavan pol od $\zeta_{A,\Omega}$ i

$$(N - D)\mathcal{M}_*^D(A, \Omega) \leq \mathrm{res}(\zeta_{A,\Omega}, D) \leq (N - D)\mathcal{M}^{*D}(A, \Omega)$$

  Residuum ne ovisi o izboru $\delta > 0$.

Svojstva razdaljinske zeta funkcije RFD-ova

(LRŽ 2017.):

Neka je $D = \dim_B(A, \Omega) < N$, te neka je $\zeta_{A,\Omega}$ meromorfno proširiva do povezanog okoliša od D.

- Ako je RFD (A, Ω) Minkowski nedegeneriran, onda je D jednostavan pol od $\zeta_{A,\Omega}$ i

$$(N - D)\mathcal{M}_*^D(A, \Omega) \leq \mathrm{res}(\zeta_{A,\Omega}, D) \leq (N - D)\mathcal{M}^{*D}(A, \Omega)$$

  Residuum ne ovisi o izboru $\delta > 0$.

- Ako je (A, Ω) Minkowski izmjeriv RFD, onda je D jednostavan pol i

$$\mathrm{res}(\zeta_{A,\Omega}, D) = (N - D)\mathcal{M}^D(A, \Omega)$$

Svojstva razdaljinske zeta funkcije RFD-ova

(LRŽ 2017.):

Neka je $D = \dim_B(A, \Omega) < N$, te neka je $\zeta_{A,\Omega}$ meromorfno proširiva do povezanog okoliša od D.

- Ako je RFD (A, Ω) Minkowski nedegeneriran, onda je D jednostavan pol od $\zeta_{A,\Omega}$ i

$$(N - D)\mathcal{M}_*^D(A, \Omega) \leq \mathrm{res}(\zeta_{A,\Omega}, D) \leq (N - D)\mathcal{M}^{*D}(A, \Omega)$$

  Residuum ne ovisi o izboru $\delta > 0$.

- Ako je (A, Ω) Minkowski izmjeriv RFD, onda je D jednostavan pol i

$$\mathrm{res}(\zeta_{A,\Omega}, D) = (N - D)\mathcal{M}^D(A, \Omega)$$

U dokazu, iz $\mathcal{M}_*^D(A, \Omega) > 0$ slijedi da je D pol, a iz $\mathcal{M}^{*D}(A, \Omega) < \infty$ slijedi da ako je D pol, onda je on najviše prvog reda. Dakle, D je pol prvog reda (tj. jednostavan pol). U dokazu se koristi cijevna zeta funkcija $\tilde{\zeta}_{A,\Omega}$ i njena veza sa $\zeta_{A,\Omega}$.

Dovoljni uvjeti za meromorfnu proširivost od $\zeta_{A,\Omega}$

(LRŽ 2017.):

- Ako je (A,Ω) t.d. je $|A_t \cap \Omega| = t^{N-D}(G(\ln t^{-1}) + O(t^{\alpha}))$ kada $t \to 0^+$, gdje su $D \in [0,N)$, $\alpha > 0$ i $G : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ je nekonstantna T-periodička, onda je $D = \dim_B(A,\Omega)$,

$$\mathcal{M}_*^D(A,\Omega) = \min G, \quad \mathcal{M}^{*D}(A,\Omega) = \max G$$

$D_{\mathrm{mer}}(\zeta_{A,\Omega}) \leq D - \alpha$, D je pol prvog reda i

$$\operatorname{res}(\zeta_{A,\Omega}, D) = (N-D) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T G(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Posebno, RFD (A,Ω) je Minkowski nedegeneriran i neizmjeriv.

Dovoljni uvjeti za meromorfnu proširivost od $\zeta_{A,\Omega}$

(LRŽ 2017.):

- Ako je (A,Ω) t.d. je $|A_t \cap \Omega| = t^{N-D}(G(\ln t^{-1}) + O(t^{\alpha}))$ kada $t \to 0^+$, gdje su $D \in [0,N)$, $\alpha > 0$ i $G : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ je nekonstantna T-periodička, onda je $D = \dim_B(A,\Omega)$,

$$\mathcal{M}_*^D(A,\Omega) = \min G, \quad \mathcal{M}^{*D}(A,\Omega) = \max G$$

  $D_{\mathrm{mer}}(\zeta_{A,\Omega}) \leq D - \alpha$, D je pol prvog reda i

$$\mathrm{res}(\zeta_{A,\Omega}, D) = (N-D) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T G(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

  Posebno, RFD (A,Ω) je Minkowski nedegeneriran i neizmjeriv.

- Ako je (A,Ω) t.d. je $|A_t \cap \Omega| = t^{N-D}(M + O(t^{\alpha}))$ kada $t \to 0^+$, za neki $0 < M < +\infty$, onda je $\mathcal{M}^D(A,\Omega) = M$ i (A,Ω) je Minkowski izmjeriv, D je pol prvog reda, te je

$$D_{\mathrm{mer}}(\zeta_{A,\Omega}) \leq D - \alpha, \quad \mathrm{res}(\zeta_{A,\Omega}, D) = (N-D) \cdot M$$

Dovoljni uvjeti Minkowskijeve izmjerivosti su skoro nužni

Gore navedeni dovoljni uvjeti za Minkovskijevu izmjerivost RFD-a (A, Ω) su skoro nužni. Dodatni uvjet za obrat je uvjet languidnosti (mlohavosti) na $\zeta_{A,\Omega}$. Dokaz koristi *Mellinovu integralnu transformaciju*.

Dovoljni uvjeti Minkowskijeve izmjerivosti su skoro nužni

Gore navedeni dovoljni uvjeti za Minkovskijevu izmjerivost RFD-a (A, Ω) su skoro nužni. Dodatni uvjet za obrat je uvjet languidnosti (mlohavosti) na $\zeta_{A,\Omega}$. Dokaz koristi *Mellinovu integralnu transformaciju*.

Moguće su i generalizacije gdje je D pol reda m većeg od 1. U tom slučaju se pojavljuje baždarna funkcija $h(t) = (\log t^{-1})^{m-1}$, a cijevna funkcija za h-Minkowski izmjeriv slučaj glasi

$$|A_t \cap \Omega| = t^{N-D} h(t)(M + O(t^{\alpha})) \quad \text{kad } t \to 0^+$$

I gornji i dolnji D-dim. Minkowskijev sadržaj RFD-a (A, Ω) su beskonačni.

Dovoljni uvjeti Minkowskijeve izmjerivosti su skoro nužni

Gore navedeni dovoljni uvjeti za Minkovskijevu izmjerivost RFD-a (A, Ω) su skoro nužni. Dodatni uvjet za obrat je uvjet languidnosti (mlohavosti) na $\zeta_{A,\Omega}$. Dokaz koristi *Mellinovu integralnu transformaciju*.

Moguće su i generalizacije gdje je D pol reda m većeg od 1. U tom slučaju se pojavljuje baždarna funkcija $h(t) = (\log t^{-1})^{m-1}$, a cijevna funkcija za h-Minkowski izmjeriv slučaj glasi

$$|A_t \cap \Omega| = t^{N-D} h(t)(M + O(t^{\alpha})) \quad \text{kad } t \to 0^+$$

I gornji i dolnji D-dim. Minkowskijev sadržaj RFD-a (A, Ω) su beskonačni. Slično i u h-Minkowski neizmjerivom slučaju:

$$|A_t \cap \Omega| = t^{N-D} h(t)(G(\ln t^{-1}) + O(t^{\alpha})) \quad \text{kad } t \to 0^+$$

Generalizirani Cantorovi skupovi $C^{(m,a)}$

Neka je m prirodan broj ≥ 2 i $a \in (0, \frac{1}{m})$. U prvom koraku u interval $[0, 1]$ postavimo m ekvidistantnih intervala širine a svaki, te izvadimo preostalih $m - 1$ otvorenih intervala, svaki širine $(1 - ma)/(m - 1)$. U drugom koraku nastavljamo na isti način s preostalih m intervala, skalirajući s faktorom a, itd. *ad infinitum*. Time dobivamo generalizirani Cantorov skup $C^{(m,a)}$. Skup $C^{(2,1/3)}$ je standardan Cantorov skup.

Generalizirani Cantorovi skupovi $C^{(m,a)}$

Neka je m prirodan broj ≥ 2 i $a \in (0, \frac{1}{m})$. U prvom koraku u interval $[0, 1]$ postavimo m ekvidistantnih intervala širine a svaki, te izvadimo preostalih $m-1$ otvorenih intervala, svaki širine $(1-ma)/(m-1)$. U drugom koraku nastavljamo na isti način s preostalih m intervala, skalirajući s faktorom a, itd. *ad infinitum*. Time dobivamo generalizirani Cantorov skup $C^{(m,a)}$. Skup $C^{(2,1/3)}$ je standardan Cantorov skup.

Vrijedi $D := \dim_B C^{(m,a)} = \log_{1/a} m$ $(= \dim_H)$ (Falconner) i skup $A = C^{(m,a)}$ je Minkowski nedegeneriran i neizmjeriv (Ž 2003.):

Generalizirani Cantorovi skupovi $C^{(m,a)}$

Neka je m prirodan broj ≥ 2 i $a \in (0, \frac{1}{m})$. U prvom koraku u interval $[0,1]$ postavimo m ekvidistantnih intervala širine a svaki, te izvadimo preostalih $m-1$ otvorenih intervala, svaki širine $(1-ma)/(m-1)$. U drugom koraku nastavljamo na isti način s preostalih m intervala, skalirajući s faktorom a, itd. *ad infinitum*. Time dobivamo generalizirani Cantorov skup $C^{(m,a)}$. Skup $C^{(2,1/3)}$ je standardan Cantorov skup.

Vrijedi $D := \dim_B C^{(m,a)} = \log_{1/a} m$ $(= \dim_H)$ (Falconner) i skup $A = C^{(m,a)}$ je Minkowski nedegeneriran i neizmjeriv (Ž 2003.):

$$\mathcal{M}_*^D(A) = \frac{1}{D}\left(\frac{2D}{1-D}\right)^{1-D}, \quad \mathcal{M}^{*D}(A) = \left(\frac{1-ma}{m-1}\right)^{D-1} \frac{1-a}{1-m^{-1}}$$

Generalizirani Cantorovi skupovi $C^{(m,a)}$

Neka je m prirodan broj ≥ 2 i $a \in (0, \frac{1}{m})$. U prvom koraku u interval $[0,1]$ postavimo m ekvidistantnih intervala širine a svaki, te izvadimo preostalih $m-1$ otvorenih intervala, svaki širine $(1-ma)/(m-1)$. U drugom koraku nastavljamo na isti način s preostalih m intervala, skalirajući s faktorom a, itd. *ad infinitum*. Time dobivamo generalizirani Cantorov skup $C^{(m,a)}$. Skup $C^{(2,1/3)}$ je standardan Cantorov skup.

Vrijedi $D := \dim_B C^{(m,a)} = \log_{1/a} m$ $(= \dim_H)$ (Falconner) i skup $A = C^{(m,a)}$ je Minkowski nedegeneriran i neizmjeriv (Ž 2003.):

$$\mathcal{M}_*^D(A) = \frac{1}{D}\left(\frac{2D}{1-D}\right)^{1-D}, \quad \mathcal{M}^{*D}(A) = \left(\frac{1-ma}{m-1}\right)^{D-1} \frac{1-a}{1-m^{-1}}$$

Glavne kompleksne dimenzije od $C^{(m,a)}$ su (LRŽ 2017.):

$$\dim_{PC} C^{(m,a)} = D + \frac{2\pi}{\ln(1/a)} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

i sve su jednostruke. Period $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{\ln(1/a)}$ ne ovisi o m, te $\mathbf{p} \to 0$ kad $a \to 0^+$. Pritom također i $D \to 0$.

Kvaziperiodički skupovi (LRŽ, 2017. *Adv. Math.*)

Funkcija $G = G(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je n-kvaziperiodička, ako je $G(\tau) = H(\tau, \tau, \ldots, \tau) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, gdje je j-ta komponenta od H periodička s minimalnim periodom T_j i $T_1, \ldots, T_n$ su racionalno nezavisni (tj. linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{Q}$). Brojevi T_k zovu se kvaziperiode od G.

Kvaziperiodički skupovi (LRŽ, 2017. *Adv. Math.*)

Funkcija $G = G(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je n-kvaziperiodička, ako je $G(\tau) = H(\tau, \tau, \ldots, \tau) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, gdje je j-ta komponenta od H periodička s minimalnim periodom T_j i $T_1, \ldots, T_n$ su racionalno nezavisni (tj. linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{Q}$). Brojevi T_k zovu se kvaziperiode od G.

Za funkciju G kažemo da je transcendentno n-kvaziperiodička ako su periodi $T_1, \ldots, T_n$ algebarski nezavisni, tj. linearno nezavisni nad poljem $\overline{\mathbb{Q}}$ svih algebarskih brojeva. Posebno, T_i/T_j su transcendentni za sve $i \neq j$.

Kvaziperiodički skupovi (LRŽ, 2017. *Adv. Math.*)

Funkcija $G = G(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je n-kvaziperiodička, ako je $G(\tau) = H(\tau, \tau, \ldots, \tau) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, gdje je j-ta komponenta od H periodička s minimalnim periodom T_j i $T_1, \ldots, T_n$ su racionalno nezavisni (tj. linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{Q}$). Brojevi T_k zovu se kvaziperiode od G.

Za funkciju G kažemo da je transcendentno n-kvaziperiodička ako su periodi $T_1, \ldots, T_n$ algebarski nezavisni, tj. linearno nezavisni nad poljem $\overline{\mathbb{Q}}$ svih algebarskih brojeva. Posebno, T_i/T_j su transcendentni za sve $i \neq j$.

Primjer. Za $n = 2$, neka je $G(\tau) = G_1(\tau) + G_2(\tau)$, gdje su G_j nekonstantne i T_j-periodičke, $j = 1, 2$, a T_1/T_2 transcendentan.

Kvaziperiodički skupovi (LRŽ, 2017. *Adv. Math.*)

Funkcija $G = G(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je n-kvaziperiodička, ako je $G(\tau) = H(\tau, \tau, \ldots, \tau) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, gdje je j-ta komponenta od H periodička s minimalnim periodom T_j i $T_1, \ldots, T_n$ su racionalno nezavisni (tj. linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{Q}$). Brojevi T_k zovu se kvaziperiode od G.

Za funkciju G kažemo da je transcendentno n-kvaziperiodička ako su periodi $T_1, \ldots, T_n$ algebarski nezavisni, tj. linearno nezavisni nad poljem $\overline{\mathbb{Q}}$ svih algebarskih brojeva. Posebno, T_i/T_j su transcendentni za sve $i \neq j$.

Primjer. Za $n = 2$, neka je $G(\tau) = G_1(\tau) + G_2(\tau)$, gdje su G_j nekonstantne i T_j-periodičke, $j = 1, 2$, a T_1/T_2 transcendentan.

Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ omeđen skup t.d.

$$|A_t| = t^{N-D}(G(\ln t^{-1}) + o(1)) \quad \text{kada } t \to 0^+,$$

gdje je $D \in [0, N]$, a G je transcendentno n-kvaziperiodička. Kažemo da je A transcendentno n-kvaziperiodičan skup.

Kvaziperiodički skupovi (LRŽ, 2017. *Adv. Math.*)

Funkcija $G = G(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je n-kvaziperiodička, ako je $G(\tau) = H(\tau, \tau, \ldots, \tau) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, gdje je j-ta komponenta od H periodička s minimalnim periodom T_j i $T_1, \ldots, T_n$ su racionalno nezavisni (tj. linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{Q}$). Brojevi T_k zovu se kvaziperiode od G.

Za funkciju G kažemo da je transcendentno n-kvaziperiodička ako su periodi $T_1, \ldots, T_n$ algebarski nezavisni, tj. linearno nezavisni nad poljem $\overline{\mathbb{Q}}$ svih algebarskih brojeva. Posebno, T_i/T_j su transcendentni za sve $i \neq j$.

Primjer. Za $n = 2$, neka je $G(\tau) = G_1(\tau) + G_2(\tau)$, gdje su G_j nekonstantne i T_j-periodičke, $j = 1, 2$, a T_1/T_2 transcendentan.

Neka je $A \subset \mathbb{R}^N$ omeđen skup t.d.

$$|A_t| = t^{N-D}(G(\ln t^{-1}) + o(1)) \quad \text{kada } t \to 0^+,$$

gdje je $D \in [0, N]$, a G je transcendentno n-kvaziperiodička. Kažemo da je A transcendentno n-kvaziperiodičan skup. Slično se definira i transcendentno ∞-kvaziperiodičan skup.

Konstrukcija 2-kvaziperiodičkih skupova

$D \in (0,1)$ zadan i $A_1 = C^{(m_1,a_1)} \subset [0,1]$, $A_2 = C^{(m_2,a_2)} \subset [2,3]$ t.d. $\dim_B A_1 = \dim_B A_2 = D$, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ skup svih različitih prostih djelitelja od m_1 i m_2, i

$$m_1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad m_2 = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$$

gdje su $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Konstrukcija 2-kvaziperiodičkih skupova

$D \in (0,1)$ zadan i $A_1 = C^{(m_1,a_1)} \subset [0,1]$, $A_2 = C^{(m_2,a_2)} \subset [2,3]$ t.d. $\dim_B A_1 = \dim_B A_2 = D$, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ skup svih različitih prostih djelitelja od m_1 i m_2, i

$$m_1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad m_2 = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$$

gdje su $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_1 \stackrel{def}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \quad e_2 \stackrel{def}{=} (\beta_1, \ldots, \beta_k)$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = A_1 \cup A_2$ transcendentno 2-kvaziperiodičan.

Konstrukcija 2-kvaziperiodičkih skupova

$D \in (0,1)$ zadan i $A_1 = C^{(m_1,a_1)} \subset [0,1]$, $A_2 = C^{(m_2,a_2)} \subset [2,3]$ t.d. $\dim_B A_1 = \dim_B A_2 = D$, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ skup svih različitih prostih djelitelja od m_1 i m_2, i

$$m_1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad m_2 = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$$

gdje su $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_1 \stackrel{def}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \quad e_2 \stackrel{def}{=} (\beta_1, \ldots, \beta_k)$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = A_1 \cup A_2$ transcendentno 2-kvaziperiodičan. Glavne kompleksne dimenzije od A čine nearitmetički skup (nije oblika $D + c\mathbb{Z}\mathrm{i}$ za niti koji $c > 0$):

$$\dim_{PC} A = \left(D + \frac{2\pi}{T_1}\mathrm{i}\mathbb{Z}\right) \cup \left(D + \frac{2\pi}{T_2}\mathrm{i}\mathbb{Z}\right) = D + \left(\frac{2\pi}{T_1}\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{T_2}\mathbb{Z}\right)\mathrm{i}$$

gdje su $T_j = \ln(1/a_j)$, $D = \log_{1/a_j} m_j$, $j = 1, 2$. Sve kompleksne dimenzije su jednostruke.

Konstrukcija 2-kvaziperiodičkih skupova

$D \in (0,1)$ zadan i $A_1 = C^{(m_1,a_1)} \subset [0,1]$, $A_2 = C^{(m_2,a_2)} \subset [2,3]$ t.d. $\dim_B A_1 = \dim_B A_2 = D$, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ skup svih različitih prostih djelitelja od m_1 i m_2, i

$$m_1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad m_2 = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$$

gdje su $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_1 \stackrel{def}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \quad e_2 \stackrel{def}{=} (\beta_1, \ldots, \beta_k)$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = A_1 \cup A_2$ transcendentno 2-kvaziperiodičan. Glavne kompleksne dimenzije od A čine nearitmetički skup (nije oblika $D + c\mathbb{Z}\mathrm{i}$ za niti koji $c > 0$):

$$\dim_{PC} A = \left(D + \frac{2\pi}{T_1}\mathrm{i}\mathbb{Z}\right) \cup \left(D + \frac{2\pi}{T_2}\mathrm{i}\mathbb{Z}\right) = D + \left(\frac{2\pi}{T_1}\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{T_2}\mathbb{Z}\right)\mathrm{i}$$

gdje su $T_j = \ln(1/a_j)$, $D = \log_{1/a_j} m_j$, $j = 1, 2$. Sve kompleksne dimenzije su jednostruke. Dokaz se temelji na uporabi Gel'fond–Schneiderova teorema (1934.) iz teorije transc. brojeva: $\rho \in \mathbb{Q}_{>0,\neq 1}$ i x iracionalan algebarski $\Rightarrow \rho^x$ transcendentan.

Konstrukcija n-kvaziperiodičkih skupova za $n \geq 2$

$D \in (0,1)$ zadan, $A_1 = C^{(m_1,a_1)} \subset I_1, \ldots, A_n = C^{(m_n,a_n)} \subset I_n$, $\dim_B A_1 = \cdots = \dim_B A_n = D$, jed. intervali (I_j) disjunktni, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ skup svih različitih prostih djelitelja od $m_1, \ldots, m_n$ i

$$m_j = p_1^{\alpha_{j1}} \cdots p_k^{\alpha_{jk}}, \quad j = 1, \ldots, n$$

gdje su $\alpha_{ji} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Konstrukcija n-kvaziperiodičkih skupova za $n \geq 2$

$D \in (0,1)$ zadan, $A_1 = C^{(m_1,a_1)} \subset I_1, \ldots, A_n = C^{(m_n,a_n)} \subset I_n$, $\dim_B A_1 = \cdots = \dim_B A_n = D$, jed. intervali (I_j) disjunktni, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ skup svih različitih prostih djelitelja od $m_1, \ldots, m_n$ i

$$m_j = p_1^{\alpha_{j1}} \cdots p_k^{\alpha_{jk}}, \quad j = 1, \ldots, n$$

gdje su $\alpha_{ji} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k}), \quad \ldots \quad , e_n = (\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nk})$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$ transcendentno n-kvaziperiodičan.

Konstrukcija n-kvaziperiodičkih skupova za $n \geq 2$

$D \in (0,1)$ zadan, $A_1 = C^{(m_1,a_1)} \subset I_1, \ldots, A_n = C^{(m_n,a_n)} \subset I_n$, $\dim_B A_1 = \cdots = \dim_B A_n = D$, jed. intervali (I_j) disjunktni, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ skup svih različitih prostih djelitelja od $m_1, \ldots, m_n$ i

$$m_j = p_1^{\alpha_{j1}} \cdots p_k^{\alpha_{jk}}, \quad j = 1, \ldots, n$$

gdje su $\alpha_{ji} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k}), \quad \ldots \quad , e_n = (\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nk})$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$ transcendentno n-kvaziperiodičan. Vrijedi:

$$\dim_{PC} A = D + \left(\bigcup_{j=1}^{n} \frac{2\pi}{T_j} \mathbb{Z} \right) \text{ i}$$

gdje su $T_j = \ln(1/a_j)$, $D = \log_{1/a_j} m_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Konstrukcija n-kvaziperiodičkih skupova za $n \geq 2$

$D \in (0,1)$ zadan, $A_1 = C^{(m_1,a_1)} \subset I_1, \ldots, A_n = C^{(m_n,a_n)} \subset I_n$, $\dim_B A_1 = \cdots = \dim_B A_n = D$, jed. intervali (I_j) disjunktni, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ skup svih različitih prostih djelitelja od $m_1, \ldots, m_n$ i

$$m_j = p_1^{\alpha_{j1}} \cdots p_k^{\alpha_{jk}}, \quad j = 1, \ldots, n$$

gdje su $\alpha_{ji} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k}), \quad \ldots \quad , e_n = (\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nk})$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = \cup_{j=1}^n A_j$ transcendentno n-kvaziperiodičan. Vrijedi:

$$\dim_{PC} A = D + \left(\bigcup_{j=1}^{n} \frac{2\pi}{T_j} \mathbb{Z} \right) \text{ i}$$

gdje su $T_j = \ln(1/a_j)$, $D = \log_{1/a_j} m_j$, $j = 1, \ldots, n$. Dokaz rabi Bakerov teorem (1965.): m_j poz. algebarski za $j = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, $\mathbb{Q}$-linearno nezavisni $\Rightarrow 1, \ln m_1, \ldots, \ln m_n$ su $\overline{\mathbb{Q}}$-linearno nezavisni.

Konstrukcija ∞-kvaziperiodičkih skupova

$D \in (0,1)$ zadan, $A_j = c_j + \lambda_j C^{(m_j, a_j)} \subset I_j$, $\lambda_j > 0$, $\sum_{j \geq 1} \lambda_j < +\infty$, $c_1 = 0$, $c_j = \sum_{k<j} \lambda_k$, $\dim_B A_j = D$ za sve $j \in \mathbb{N}$, intervali $(I_j)_{j \geq 1}$ disjunktni, $\{p_k\}_{k \geq 1}$ skup *svih* prostih brojeva i

$$m_j = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha_{jk}} \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}$$

gdje su $\alpha_{jk} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_j = (\alpha_{jk})_{k \geq 1} \in \ell_\infty(\mathbb{R}), \quad j \in \mathbb{N}$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ transcendentno ∞-kvaziperiodičan.

Konstrukcija ∞-kvaziperiodičkih skupova

$D \in (0,1)$ zadan, $A_j = c_j + \lambda_j C^{(m_j, a_j)} \subset I_j$, $\lambda_j > 0$, $\sum_{j \geq 1} \lambda_j < +\infty$, $c_1 = 0$, $c_j = \sum_{k<j} \lambda_k$, $\dim_B A_j = D$ za sve $j \in \mathbb{N}$, intervali $(I_j)_{j \geq 1}$ disjunktni, $\{p_k\}_{k \geq 1}$ skup *svih* prostih brojeva i

$$m_j = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha_{jk}} \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}$$

gdje su $\alpha_{jk} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_j = (\alpha_{jk})_{k \geq 1} \in \ell_\infty(\mathbb{R}), \quad j \in \mathbb{N}$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ transcendentno ∞-kvaziperiodičan. Pravac $\{\operatorname{Re} s = D\}$ je prirodna granica za $\zeta_{A, \cup_j I_j} : \{\operatorname{Re} s > D\} \to \mathbb{C}$. Kvaziperiode od A su $T_j = \ln(1/a_j)$; $D = \log_{1/a_j} m_j$, za sve $j \in \mathbb{N}$.

Konstrukcija ∞-kvaziperiodičkih skupova

$D \in (0,1)$ zadan, $A_j = c_j + \lambda_j C^{(m_j,a_j)} \subset I_j$, $\lambda_j > 0$, $\sum_{j\geq 1} \lambda_j < +\infty$, $c_1 = 0$, $c_j = \sum_{k<j} \lambda_k$, $\dim_B A_j = D$ za sve $j \in \mathbb{N}$, intervali $(I_j)_{j\geq 1}$ disjunktni, $\{p_k\}_{k\geq 1}$ skup *svih* prostih brojeva i

$$m_j = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha_{jk}} \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}$$

gdje su $\alpha_{jk} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_j = (\alpha_{jk})_{k\geq 1} \in \ell_\infty(\mathbb{R}), \quad j \in \mathbb{N}$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ transcendentno ∞-kvaziperiodičan. Pravac $\{\operatorname{Re} s = D\}$ je prirodna granica za $\zeta_{A,\cup_j I_j} : \{\operatorname{Re} s > D\} \to \mathbb{C}$. Kvaziperiode od A su $T_j = \ln(1/a_j)$; $D = \log_{1/a_j} m_j$, za sve $j \in \mathbb{N}$. Dokaz rabi Bakerov teorem (1965.). Iz $m_j \to \infty$ slijedi $a_j \to 0$, dakle $T_j \to \infty$ i $\mathbf{p}_j = \frac{2\pi}{T_j} \to 0$, pa je $\{\operatorname{Re} s = D\}$ doista prirodna granica.

Konstrukcija ∞-kvaziperiodičkih skupova

$D \in (0,1)$ zadan, $A_j = c_j + \lambda_j C^{(m_j,a_j)} \subset I_j$, $\lambda_j > 0$, $\sum_{j\geq 1} \lambda_j < +\infty$, $c_1 = 0$, $c_j = \sum_{k<j} \lambda_k$, $\dim_B A_j = D$ za sve $j \in \mathbb{N}$, intervali $(I_j)_{j\geq 1}$ disjunktni, $\{p_k\}_{k\geq 1}$ skup *svih* prostih brojeva i

$$m_j = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha_{jk}} \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}$$

gdje su $\alpha_{jk} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako su eksponentni vektori

$$e_j = (\alpha_{jk})_{k\geq 1} \in \ell_\infty(\mathbb{R}), \quad j \in \mathbb{N}$$

linearno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, onda je skup $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ transcendentno ∞-kvaziperiodičan. Pravac $\{\operatorname{Re} s = D\}$ je prirodna granica za $\zeta_{A,\cup_j I_j} : \{\operatorname{Re} s > D\} \to \mathbb{C}$. Kvaziperiode od A su $T_j = \ln(1/a_j)$; $D = \log_{1/a_j} m_j$, za sve $j \in \mathbb{N}$. Dokaz rabi Bakerov teorem (1965.). Iz $m_j \to \infty$ slijedi $a_j \to 0$, dakle $T_j \to \infty$ i $\mathbf{p}_j = \frac{2\pi}{T_j} \to 0$, pa je $\{\operatorname{Re} s = D\}$ doista prirodna granica. Sve je prethodne konstrukcije moguće interpretirati i u terminima fraktalnih struna.

Spektralne zeta funkcije

Neka je Ω omeđen otvoren skup u $\mathbb{R}^N$. Neka je $(\mu_k)_{k\geq 1}$ skup svih vlastitih vrijednosti Dirichletova problema:

$$-\Delta u = \mu u, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad u \neq 0$$

računajući i kratnosti. Niz $\sigma(\Omega) = (\mu_k^{1/2})_{k\geq 1}$ zove se spektar od Ω.

Spektralne zeta funkcije

Neka je Ω omeđen otvoren skup u $\mathbb{R}^N$. Neka je $(\mu_k)_{k\geq 1}$ skup svih vlastitih vrijednosti Dirichletova problema:

$$-\Delta u = \mu u, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad u \neq 0$$

računajući i kratnosti. Niz $\sigma(\Omega) = (\mu_k^{1/2})_{k\geq 1}$ zove se spektar od Ω. Spektralna zeta funkcija od Ω je

$$\zeta_\Omega^*(s) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-s/2}, \quad \text{za } s \in \mathbb{C} \text{ i } \operatorname{Re} s \text{ dovoljno velik.}$$

Vrijedi svojstvo skaliranja: za $\lambda > 0$ i $\operatorname{Re} s > \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega)$ je $\zeta_{\lambda\Omega}(s) = \lambda^s \zeta_\Omega(s)$.

Spektralne zeta funkcije

Neka je Ω omeđen otvoren skup u $\mathbb{R}^N$. Neka je $(\mu_k)_{k\geq 1}$ skup svih vlastitih vrijednosti Dirichletova problema:

$$-\Delta u = \mu u, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad u \neq 0$$

računajući i kratnosti. Niz $\sigma(\Omega) = (\mu_k^{1/2})_{k\geq 1}$ zove se spektar od Ω. Spektralna zeta funkcija od Ω je

$$\zeta_\Omega^*(s) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-s/2}, \quad \text{za } s \in \mathbb{C} \text{ i } \operatorname{Re} s \text{ dovoljno velik.}$$

Vrijedi svojstvo skaliranja: za $\lambda > 0$ i $\operatorname{Re} s > \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega)$ je $\zeta_{\lambda\Omega}(s) = \lambda^s \zeta_\Omega(s)$.

(Lapidus, 1993.): Ako je $\overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega) < N$, onda je

$$D_{\mathrm{hol}}(\zeta_\Omega^*) = N, \quad D_{\mathrm{mer}}(\zeta_\Omega^*) \leq \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega),$$

$s = N$ je jedini pol u $\{\operatorname{Re} s > \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega)\}$; to je jednostavan pol i

$$\operatorname{res}(\zeta_\Omega^*, N) = \frac{N\omega_N}{(2\pi)^N}|\Omega| \quad \text{(LRŽ, 2017.)}$$

Lapidusovo poopćenje Weylove asimptotike

Dokaz iz 2017. je jednostavniji nego Lapidusov iz 1993. U njemu se međutim bitno rabi ovaj Lapidusov rezultat iz 1991. (*Trans. AMS*, poopćenje znamenite Weylove asimptotike iz 1912.):

Ako je $\overline{D} = \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega) \in (N-1, N]$, onda je za svaki $d > \overline{D}$,

$$\mu_k = \frac{4\pi^2}{(\omega_N|\Omega|)^{2/N}} \cdot k^{2/N} + O(k^{(2+d-N)/N}) \quad \text{kad } k \to \infty$$

Lapidusovo poopćenje Weylove asimptotike

Dokaz iz 2017. je jednostavniji nego Lapidusov iz 1993. U njemu se međutim bitno rabi ovaj Lapidusov rezultat iz 1991. (*Trans. AMS*, poopćenje znamenite Weylove asimptotike iz 1912.):

Ako je $\overline{D} = \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega) \in (N-1, N]$, onda je za svaki $d > \overline{D}$,

$$\mu_k = \frac{4\pi^2}{(\omega_N|\Omega|)^{2/N}} \cdot k^{2/N} + O(k^{(2+d-N)/N}) \quad \text{kad } k \to \infty$$

Ako je $\overline{D} = \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega) = N-1$, onda je za svaki $d > \overline{D}$,

$$\mu_k = \frac{4\pi^2}{(\omega_N|\Omega|)^{2/N}} \cdot k^{2/N} + O(k^{(2+d-N)/N} \ln k) \quad \text{kad } k \to \infty$$

Lapidusovo poopćenje Weylove asimptotike

Dokaz iz 2017. je jednostavniji nego Lapidusov iz 1993. U njemu se međutim bitno rabi ovaj Lapidusov rezultat iz 1991. (*Trans. AMS*, poopćenje znamenite Weylove asimptotike iz 1912.):

Ako je $\overline{D} = \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega) \in (N-1, N]$, onda je za svaki $d > \overline{D}$,

$$\mu_k = \frac{4\pi^2}{(\omega_N|\Omega|)^{2/N}} \cdot k^{2/N} + O(k^{(2+d-N)/N}) \quad \text{kad } k \to \infty$$

Ako je $\overline{D} = \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega) = N-1$, onda je za svaki $d > \overline{D}$,

$$\mu_k = \frac{4\pi^2}{(\omega_N|\Omega|)^{2/N}} \cdot k^{2/N} + O(k^{(2+d-N)/N} \ln k) \quad \text{kad } k \to \infty$$

Ako je $\mathcal{M}^{*\overline{D}}(\partial\Omega, \Omega) < \infty$, onda u oba slučaja smijemo staviti $d = \overline{D}$.

Lapidusovo poopćenje Weylove asimptotike

Dokaz iz 2017. je jednostavniji nego Lapidusov iz 1993. U njemu se međutim bitno rabi ovaj Lapidusov rezultat iz 1991. (*Trans. AMS*, poopćenje znamenite Weylove asimptotike iz 1912.):

Ako je $\overline{D} = \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega) \in (N-1, N]$, onda je za svaki $d > \overline{D}$,

$$\mu_k = \frac{4\pi^2}{(\omega_N|\Omega|)^{2/N}} \cdot k^{2/N} + O(k^{(2+d-N)/N}) \quad \text{kad } k \to \infty$$

Ako je $\overline{D} = \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega) = N-1$, onda je za svaki $d > \overline{D}$,

$$\mu_k = \frac{4\pi^2}{(\omega_N|\Omega|)^{2/N}} \cdot k^{2/N} + O(k^{(2+d-N)/N} \ln k) \quad \text{kad } k \to \infty$$

Ako je $\mathcal{M}^{*\overline{D}}(\partial\Omega, \Omega) < \infty$, onda u oba slučaja smijemo staviti $d = \overline{D}$.

(LRŽ 2017.): Nejednakost $D_{\mathrm{mer}}(\zeta_\Omega^*) \leq \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega)$ u Lapidusovu teoremu iz 1993. je optimalna: za svaki $N \geq 1$ postoji $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ t.d. je $D_{\mathrm{mer}}(\zeta_\Omega^*) = \overline{\dim}_B(\partial\Omega, \Omega)$.

Inverzni spektralni problem i Minkowskijeva izmjerivost fraktalnih struna

$\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ neka je fraktalna struna, $\Omega = \sqcup_{j\geq 1} I_j$, $|I_j| = \ell_j$, $j \geq 1$. Promatramo spektar $\sigma\Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)$, gdje $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ uzimamo s nul-rubnim uvjetom na $\partial\Omega$. (Spektar je niz realnih brojeva μ_k koji teži u $+\infty$.)

Inverzni spektralni problem i Minkowskijeva izmjerivost fraktalnih struna

$\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ neka je fraktalna struna, $\Omega = \sqcup_{j\geq 1} I_j$, $|I_j| = \ell_j$, $j \geq 1$. Promatramo spektar $\sigma\Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)$, gdje $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ uzimamo s nul-rubnim uvjetom na $\partial\Omega$. (Spektar je niz realnih brojeva μ_k koji teži u $+\infty$.) Spektralna funkcija prebrojavanja (spectral counting function) od $\mathcal{L}$ je

$$N_{\mathcal{L}}(\mu) \stackrel{def}{=} \sharp\Big\{\lambda \in (0,\mu) : \lambda \in \sigma\Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)\Big\}, \quad \text{za } \mu \in (0,+\infty)$$

Inverzni spektralni problem i Minkowskijeva izmjerivost fraktalnih struna

$\mathcal{L} = (\ell_j)_{j\geq 1}$ neka je fraktalna struna, $\Omega = \sqcup_{j\geq 1} I_j$, $|I_j| = \ell_j$, $j \geq 1$. Promatramo spektar $\sigma\Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)$, gdje $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ uzimamo s nul-rubnim uvjetom na $\partial\Omega$. (Spektar je niz realnih brojeva μ_k koji teži u $+\infty$.) Spektralna funkcija prebrojavanja (spectral counting function) od $\mathcal{L}$ je

$$N_{\mathcal{L}}(\mu) \stackrel{def}{=} \sharp\Big\{\lambda \in (0,\mu) : \lambda \in \sigma\Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)\Big\}, \quad \text{za } \mu \in (0,+\infty)$$

Geometrijska informacija o $\mathcal{L}$ implicira informaciju o spektru: ako je fraktalna struna $\mathcal{L}$ Minkowski izmjeriva, onda je

$$N_{\mathcal{L}}(\mu) = c_1\,\mu^{1/2} - c_D\mathcal{M}^D(\mathcal{L})\,\mu^{D/2} + o(\mu^{D/2}) \quad \text{kada } \mu \to +\infty$$

gdje su c_1 i c_D pozitivne konstante. Tj., ako je struna $\mathcal{L}$ Minkowski izmjeriva, onda ne postoje oscilacije u drugom članu asimptotskog razvoja funkcije prebrojavanja $N_{\mathcal{L}}(\mu)$.

Riemannova hipoteza u terminima fraktalnih struna

Promatramo inverzni spektralni problem ovisan o $D \in (0,1)$, koji uključuje Minkowskijevu izmjerivost:

$(\mathrm{ISP})_D$ Ako je fraktalna struna $\mathcal{L}$ takva da je $N_{\mathcal{L}}(\mu) = c_1\,\mu^{1/2} - c_{2,D}\,\mu^{D/2} + o(\mu^{D/2})$ kada $\mu \to +\infty$ za neki $c_{2,D} > 0$, slijedi li da je $\mathcal{L}$ Minkowski izmjeriva?

Drugim riječima, možemo li iz pretpostavke o spektru dobiti zaključak o Minkowskijevom sadržaju, tj. o geometriji strune?

Riemannova hipoteza u terminima fraktalnih struna

Promatramo inverzni spektralni problem ovisan o $D \in (0,1)$, koji uključuje Minkowskijevu izmjerivost:

$(\mathrm{ISP})_D$ Ako je fraktalna struna $\mathcal{L}$ takva da je $N_{\mathcal{L}}(\mu) = c_1\,\mu^{1/2} - c_{2,D}\,\mu^{D/2} + o(\mu^{D/2})$ kada $\mu \to +\infty$ za neki $c_{2,D} > 0$, slijedi li da je $\mathcal{L}$ Minkowski izmjeriva?

Drugim riječima, možemo li iz pretpostavke o spektru dobiti zaključak o Minkowskijevom sadržaju, tj. o geometriji strune?

Za $D = 1/2$ zna se da je odgovor na problem $(\mathrm{ISP})_{1/2}$ negativan. Štoviše, za bilo koji $D \in (0,1)$, problem $(\mathrm{ISP})_D$ je istinit $\Longleftrightarrow$ Riemannova zeta funkcija ζ_R nema nultočaka na vertikalnom pravcu $\{\mathrm{Re}\, s = D\}$.

Riemannova hipoteza u terminima fraktalnih struna

Promatramo inverzni spektralni problem ovisan o $D \in (0,1)$, koji uključuje Minkowskijevu izmjerivost:

$(\mathrm{ISP})_D$ Ako je fraktalna struna $\mathcal{L}$ takva da je $N_{\mathcal{L}}(\mu) = c_1\,\mu^{1/2} - c_{2,D}\,\mu^{D/2} + o(\mu^{D/2})$ kada $\mu \to +\infty$ za neki $c_{2,D} > 0$, slijedi li da je $\mathcal{L}$ Minkowski izmjeriva?

Drugim riječima, možemo li iz pretpostavke o spektru dobiti zaključak o Minkowskijevom sadržaju, tj. o geometriji strune?

Za $D = 1/2$ zna se da je odgovor na problem $(\mathrm{ISP})_{1/2}$ negativan. Štoviše, za bilo koji $D \in (0,1)$, problem $(\mathrm{ISP})_D$ je istinit $\iff$ Riemannova zeta funkcija ζ_R nema nultočaka na vertikalnom pravcu $\{\mathrm{Re}\, s = D\}$.

(Lapidus i Maier 1996):
$(\mathrm{ISP})_D$ ima pozitivan odgovor za sve $D \in (0,1)$, $D \neq 1/2$ $\iff$ Riemannova hipoteza je istinita.

Karakterizacija Minkowskijeve izmjerivosti

(LRŽ 2017.) Neka je RFD (A, Ω) languidan (tj. mlohav: uvjet na asimptotiku od $\zeta_{A,\Omega}$). Pretpostavimo da postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $D < N$. Onda su sljedeća dva svojstva ekivalentna:

- RFD (A, Ω) je Minkowski izmjeriv
- D je jedini pol od $\zeta_{A,\Omega}$ na kritičnom pravcu $\{\operatorname{Re} s = D\}$ i D je pol prvog reda.

Karakterizacija Minkowskijeve izmjerivosti

(LRŽ 2017.) Neka je RFD (A, Ω) languidan (tj. mlohav: uvjet na asimptotiku od $\zeta_{A,\Omega}$). Pretpostavimo da postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $D < N$. Onda su sljedeća dva svojstva ekivalentna:

- RFD (A, Ω) je Minkowski izmjeriv
- D je jedini pol od $\zeta_{A,\Omega}$ na kritičnom pravcu $\{\operatorname{Re} s = D\}$ i D je pol prvog reda.

Proširuje rezultat Lapidusa i van Frankenhuijsena za f. strune, 2006. Dokaz koristi Mellinovu transf. i *Wiener-Pittov Taub. tm.*

Karakterizacija Minkowskijeve izmjerivosti

(LRŽ 2017.) Neka je RFD (A, Ω) languidan (tj. mlohav: uvjet na asimptotiku od $\zeta_{A,\Omega}$). Pretpostavimo da postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $D < N$. Onda su sljedeća dva svojstva ekivalentna:

- RFD (A, Ω) je Minkowski izmjeriv
- D je jedini pol od $\zeta_{A,\Omega}$ na kritičnom pravcu $\{\operatorname{Re} s = D\}$ i D je pol prvog reda.

Proširuje rezultat Lapidusa i van Frankenhuijsena za f. strune, 2006. Dokaz koristi Mellinovu transf. i *Wiener-Pittov Taub. tm.*

Uvjet languidnosti je ispunjen za sebi-slične RFD-ove u rešetkastom (lattice) slučaju: $r_1, \ldots, r_n \in (0, 1)$ skalirajući faktori sebi-sličnog RFD-a su takvi da je *multiplikativna* grupa $\prod_j (r_j)^{\mathbb{Z}}$ ranga 1 u $(0, +\infty)$, tj. jednaka je $r^{\mathbb{Z}}$ za neki $r \in (0, 1)$. Ili ekv.: brojevi $\ln r_1, \ldots, \ln r_n$ razapinju u $\mathbb{R}$ diskretnu *aditivnu* grupu $(\ln r)\mathbb{Z}$.

Karakterizacija Minkowskijeve izmjerivosti

(LRŽ 2017.) Neka je RFD (A, Ω) languidan (tj. mlohav: uvjet na asimptotiku od $\zeta_{A,\Omega}$). Pretpostavimo da postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $D < N$. Onda su sljedeća dva svojstva ekivalentna:

- RFD (A, Ω) je Minkowski izmjeriv
- D je jedini pol od $\zeta_{A,\Omega}$ na kritičnom pravcu $\{\operatorname{Re} s = D\}$ i D je pol prvog reda.

Proširuje rezultat Lapidusa i van Frankenhuijsena za f. strune, 2006. Dokaz koristi Mellinovu transf. i *Wiener-Pittov Taub. tm*.

Uvjet languidnosti je ispunjen za sebi-slične RFD-ove u rešetkastom (lattice) slučaju: $r_1, \ldots, r_n \in (0, 1)$ skalirajući faktori sebi-sličnog RFD-a su takvi da je *multiplikativna* grupa $\prod_j (r_j)^{\mathbb{Z}}$ ranga 1 u $(0, +\infty)$, tj. jednaka je $r^{\mathbb{Z}}$ za neki $r \in (0, 1)$. Ili ekv.: brojevi $\ln r_1, \ldots, \ln r_n$ razapinju u $\mathbb{R}$ diskretnu *aditivnu* grupu $(\ln r)\mathbb{Z}$.

(Kombrink i Winter, 2018.): Rešetkasti sebi-slični skupovi u $\mathbb{R}$ nisu Minkowski izmjerivi. (Lapidus i van Frankenhuijsen, 2006.): Sebi-slična f.s. $\mathcal{L}$ je Mink. izmjeriva $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ nije rešetkasta.

Karakterizacija Minkowskijeve izmjerivosti

(LRŽ 2017.) Neka je RFD (A, Ω) languidan (tj. mlohav: uvjet na asimptotiku od $\zeta_{A,\Omega}$). Pretpostavimo da postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $D < N$. Onda su sljedeća dva svojstva ekivalentna:

- RFD (A, Ω) je Minkowski izmjeriv
- D je jedini pol od $\zeta_{A,\Omega}$ na kritičnom pravcu $\{\operatorname{Re} s = D\}$ i D je pol prvog reda.

Proširuje rezultat Lapidusa i van Frankenhuijsena za f. strune, 2006. Dokaz koristi Mellinovu transf. i *Wiener-Pittov Taub. tm.*

Uvjet languidnosti je ispunjen za sebi-slične RFD-ove u rešetkastom (lattice) slučaju: $r_1, \ldots, r_n \in (0, 1)$ skalirajući faktori sebi-sličnog RFD-a su takvi da je *multiplikativna* grupa $\prod_j (r_j)^{\mathbb{Z}}$ ranga 1 u $(0, +\infty)$, tj. jednaka je $r^{\mathbb{Z}}$ za neki $r \in (0, 1)$. Ili ekv.: brojevi $\ln r_1, \ldots, \ln r_n$ razapinju u $\mathbb{R}$ diskretnu *aditivnu* grupu $(\ln r)\mathbb{Z}$.

(Kombrink i Winter, 2018.): Rešetkasti sebi-slični skupovi u $\mathbb{R}$ nisu Minkowski izmjerivi. (Lapidus i van Frankenhuijsen, 2006.): Sebi-slična f.s. $\mathcal{L}$ je Mink. izmjeriva $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ nije rešetkasta.

OP. Koji RFD-ovi (A, Ω) ispunjavaju uvjet languidnosti?

Nuždan uvjet za meromorfnu proširivost $\zeta_{A,\Omega}$

Neka je RFD (A, Ω) languidan. Pretpostavimo da postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $D < N$.
Ako je $\zeta_{A,\Omega}$ meromorfno proširiva na $\{\operatorname{Re} s > D - \alpha\}$ za neki $\alpha > 0$, tako da je D jedini pol u toj poluravnini, i to reda reda $m \geq 1$, onda je

$$|A_t \cap \Omega| = t^{N-D} h(t)(M + O(t^{\alpha})) \quad \text{kad } t \to 0^+$$

gdje je $h(t) = (\ln t^{-1})^{m-1}$ za $t \in (0, 1)$, baždarna funkcija (gauge function), i $0 < M < \infty$.

Nuždan uvjet za meromorfnu proširivost $\zeta_{A,\Omega}$

Neka je RFD (A, Ω) languidan. Pretpostavimo da postoji $D = \dim_B(A, \Omega)$ i $D < N$.
Ako je $\zeta_{A,\Omega}$ meromorfno proširiva na $\{\operatorname{Re} s > D - \alpha\}$ za neki $\alpha > 0$, tako da je D jedini pol u toj poluravnini, i to reda reda $m \geq 1$, onda je

$$|A_t \cap \Omega| = t^{N-D} h(t)(M + O(t^{\alpha})) \quad \text{kad } t \to 0^+$$

gdje je $h(t) = (\ln t^{-1})^{m-1}$ za $t \in (0, 1)$, baždarna funkcija (gauge function), i $0 < M < \infty$.

Def. D-dimenzionalni baždarni Minkowskijev sadržaj:

$$\mathcal{M}^D(A, \Omega, h) \stackrel{def}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{|A_t \cap \Omega|}{t^{N-D} h(t)}$$

ako limes postoji. U gornjem rezultatu je RFD (A, Ω) baždarno Minkowski izmjeriv ili h-Minkowski izmjeriv.

Slično definiramo $\mathcal{M}_*^D(A, \Omega, h)$ i $\mathcal{M}^{*D}(A, \Omega, h)$.

Baždarna funkcija za fraktalnu strunu s bitnim singularitetima

Neka je $\mathcal{L} = C^{(1/3)}$ i

$$\mathcal{L}^{(1)} = f(\mathcal{L}) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{L}^k$$

gdje je $\mathcal{L}^k = \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.

Baždarna funkcija za fraktalnu strunu s bitnim singularitetima

Neka je $\mathcal{L} = C^{(1/3)}$ i

$$\mathcal{L}^{(1)} = f(\mathcal{L}) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathcal{L}^k$$

gdje je $\mathcal{L}^k = \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$. Očekujemo da je baždarna funkcija fraktalne strune $\mathcal{L}^{(1)}$ oblika

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{k-1} \quad \text{gdje su } c_k > 0$$

Baždarna funkcija za fraktalnu strunu s bitnim singularitetima

Neka je $\mathcal{L} = C^{(1/3)}$ i

$$\mathcal{L}^{(1)} = f(\mathcal{L}) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathcal{L}^k$$

gdje je $\mathcal{L}^k = \mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$. Očekujemo da je baždarna funkcija fraktalne strune $\mathcal{L}^{(1)}$ oblika

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Big(\ln \frac{1}{t}\Big)^{k-1} \quad \text{gdje su } c_k > 0$$

Točnije, za geom. realizaciju $A = A_{\mathcal{L}^{(1)}}$ f. strune $\mathcal{L}^{(1)}$ je

$$|A_t| = t^{1-D} h(t)(G(\ln \frac{1}{t}) + o(1)) \quad \text{kada } t \to 0^+$$

gdje je $D = \log_3 2$ pol prvog reda od $\zeta_{\mathcal{L}}$, a *bitni singularitet* od $\zeta_{\mathcal{L}^{(1)}}$. Štoviše, aritmetički skup $D + \frac{2\pi}{\ln 3}\mathrm{i}\mathbb{Z}$ sastoji se od bitnih singulariteta od $\zeta_{\mathcal{L}^{(1)}}$, a to su jedini izlorirani singulariteti na kritičnom pravcu $\{\mathrm{Re}\, s = D\}$.

Pogled odozgor (LRŽ, 2017.)

- $\{\text{fraktalne strune}\} \subset \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset \{\text{RFD-ovi}\}$
- $\{\zeta_{\mathcal{L}}\} \subset \{\zeta_A\} \subset \{\zeta_{A,\Omega}\}$ (1990., 2009., 2017.)

Pogled odozgor (LRŽ, 2017.)

- $\{\text{fraktalne strune}\} \subset \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset \{\text{RFD-ovi}\}$
- $\{\zeta_{\mathcal{L}}\} \subset \{\zeta_A\} \subset \{\zeta_{A,\Omega}\}$ (1990., 2009., 2017.)

- Kategorije:

Pogled odozgor (LRŽ, 2017.)

- $\{\text{fraktalne strune}\} \subset \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset \{\text{RFD-ovi}\}$
- $\{\zeta_{\mathcal{L}}\} \subset \{\zeta_A\} \subset \{\zeta_{A,\Omega}\}$ (1990., 2009., 2017.)

- Kategorije:
  - $\mathbf{FS} = \{\text{fraktalne strune } \mathcal{L}\} \subset$
    $\mathbf{CS}(\mathbb{R}^N) = \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset$
    $\mathbf{RFD}(\mathbb{R}^N) = \{\text{RFD-ovi } (A, \Omega)\}$

Pogled odozgor (LRŽ, 2017.)

- $\{\text{fraktalne strune}\} \subset \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset \{\text{RFD-ovi}\}$
- $\{\zeta_{\mathcal{L}}\} \subset \{\zeta_A\} \subset \{\zeta_{A,\Omega}\}$ (1990., 2009., 2017.)

- Kategorije:
  - $\mathbf{FS} = \{\text{fraktalne strune } \mathcal{L}\} \subset$
    $\mathbf{CS}(\mathbb{R}^N) = \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset$
    $\mathbf{RFD}(\mathbb{R}^N) = \{\text{RFD-ovi } (A, \Omega)\}$
  - *Paramorfizmi* – preslikavanja među RFD-ovima koja čuvaju glavne kompleksne dimenzije RFD-ova i njihove kratnosti (kao i bitne singularitete i prirodne granice)

Pogled odozgor (LRŽ, 2017.)

- $\{\text{fraktalne strune}\} \subset \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset \{\text{RFD-ovi}\}$
- $\{\zeta_{\mathcal{L}}\} \subset \{\zeta_A\} \subset \{\zeta_{A,\Omega}\}$ (1990., 2009., 2017.)

- Kategorije:
  - $\mathbf{FS} = \{\text{fraktalne strune } \mathcal{L}\} \subset$
    $\mathbf{CS}(\mathbb{R}^N) = \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset$
    $\mathbf{RFD}(\mathbb{R}^N) = \{\text{RFD-ovi } (A, \Omega)\}$
  - *Paramorfizmi* – preslikavanja među RFD-ovima koja čuvaju glavne kompleksne dimenzije RFD-ova i njihove kratnosti (kao i bitne singularitete i prirodne granice)
  - OP. Koja su to preslikavanja? Nije nam poznato čak niti za fraktalne strune.

Pogled odozgor (LRŽ, 2017.)

- $\{\text{fraktalne strune}\} \subset \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset \{\text{RFD-ovi}\}$
- $\{\zeta_{\mathcal{L}}\} \subset \{\zeta_A\} \subset \{\zeta_{A,\Omega}\}$ (1990., 2009., 2017.)

- Kategorije:
  - $\mathbf{FS} = \{\text{fraktalne strune } \mathcal{L}\} \subset$
    $\mathbf{CS}(\mathbb{R}^N) = \{\text{kompaktni skupovi}\} \subset$
    $\mathbf{RFD}(\mathbb{R}^N) = \{\text{RFD-ovi } (A, \Omega)\}$
  - *Paramorfizmi* – preslikavanja među RFD-ovima koja čuvaju glavne kompleksne dimenzije RFD-ova i njihove kratnosti (kao i bitne singularitete i prirodne granice)
  - OP. Koja su to preslikavanja? Nije nam poznato čak niti za fraktalne strune.

- Edukativna uloga Harvey-Polkingova rezultata za razumijevanje Lebesgueova integrala. Osnovni sadržaj je prikladan za studente druge godine studija matematike, kao i konstrukcija maksimalno singularnih funkcija u Lebesgueovom prostoru $L^1(\alpha, \beta)$.

Prošireni singularni skup i gornja singularna dimenzija

Za L-izmjerivu funkciju $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ definiramo prošireni singularni skup (extended singular set):

$$\text{e-Sing}\, u \stackrel{def}{=} \left\{ a \in \Omega : \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{r^N} \int_{B_r(a)} u(x)\, \mathrm{d}x = +\infty \right\}$$

Očevidno je $\text{Sing}\, u \subseteq \text{e-Sing}\, u$. Elemente skupa $\text{e-Sing}\, u \setminus \text{Sing}\, u$ možemo zvati slabim singularitetima od u: tu su na pr. logaritamski i iterirani logaritamski singulariteti od u.

Prošireni singularni skup i gornja singularna dimenzija

Za L-izmjerivu funkciju $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ definiramo prošireni singularni skup (extended singular set):

$$\text{e-Sing}\, u \overset{def}{=} \left\{ a \in \Omega : \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{r^N} \int_{B_r(a)} u(x)\, \mathrm{d}x = +\infty \right\}$$

Očevidno je $\operatorname{Sing} u \subseteq \text{e-Sing}\, u$. Elemente skupa $\text{e-Sing}\, u \setminus \operatorname{Sing} u$ možemo zvati slabim singularitetima od u: tu su na pr. logaritamski i iterirani logaritamski singulariteti od u.

Za zadani prostor (ili samo skup) realnih izmjerivih funkcija X iz zadanog otv. skupa Ω u $\overline{\mathbb{R}}$ definiramo gornju singularnu dimenziju od X (Ž 2002.):

$$\text{s-}\overline{\dim}\, X \overset{def}{=} \sup\{\dim_H(\text{e-Sing}\, u) : u \in X\}$$

Očevidno je $0 \leq \text{s-}\dim X \leq \text{s-}\overline{\dim}\, X \leq N$. U većini slučajeva je $\text{s-}\dim X = \text{s-}\overline{\dim}\, X$, ali ne uvijek.

Prošireni singularni skup i gornja singularna dimenzija

Za L-izmjerivu funkciju $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ definiramo prošireni singularni skup (extended singular set):

$$\text{e-Sing}\, u \stackrel{def}{=} \left\{ a \in \Omega : \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{r^N} \int_{B_r(a)} u(x)\, \mathrm{d}x = +\infty \right\}$$

Očevidno je $\operatorname{Sing} u \subseteq \text{e-Sing}\, u$. Elemente skupa $\text{e-Sing}\, u \setminus \operatorname{Sing} u$ možemo zvati slabim singularitetima od u: tu su na pr. logaritamski i iterirani logaritamski singulariteti od u.

Za zadani prostor (ili samo skup) realnih izmjerivih funkcija X iz zadanog otv. skupa Ω u $\overline{\mathbb{R}}$ definiramo gornju singularnu dimenziju od X (Ž 2002.):

$$\text{s-}\overline{\dim}\, X \stackrel{def}{=} \sup\{\dim_H(\text{e-Sing}\, u) : u \in X\}$$

Očevidno je $0 \leq \text{s-}\dim X \leq \text{s-}\overline{\dim}\, X \leq N$. U većini slučajeva je $\text{s-}\dim X = \text{s-}\overline{\dim}\, X$, ali ne uvijek.

Primjer (Ž 2002.) Za $X = \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathbb{R}^N)$ je $\text{s-}\dim X = 0$, ali $\text{s-}\overline{\dim}\, X = N$.

Neki otvoreni problemi za singularne dimenzije

Za bilo koji prostor realnih funkcija X prirodno je pitati se koliko mogu biti veliki (u smislu Hausdorffove dimenzije) singularni skupovi funkcija u X, tj. koliko iznose $\text{s-dim}\, X$ i $\overline{\text{s-dim}}\, X$.

Neki otvoreni problemi za singularne dimenzije

Za bilo koji prostor realnih funkcija X prirodno je pitati se koliko mogu biti veliki (u smislu Hausdorffove dimenzije) singularni skupovi funkcija u X, tj. koliko iznose $\text{s-dim}\, X$ i $\overline{\text{s-dim}}\, X$.

OP. Koliko nam je poznato, za sljedeće vektorske prostore X su vrijednosti singularnih dimenzija $\text{s-dim}\, X$ i $\overline{\text{s-dim}}\, X$ općenito nepoznate:

- za BMO prostore
- za Morreyeve prostore
- za Campanatove prostore
- za Orliczeve prostore
- za Lorentzove prostore

i mnoge druge.

Neki otvoreni problemi za singularne dimenzije

Za bilo koji prostor realnih funkcija X prirodno je pitati se koliko mogu biti veliki (u smislu Hausdorffove dimenzije) singularni skupovi funkcija u X, tj. koliko iznose $\text{s-dim}\, X$ i $\overline{\text{s-dim}}\, X$.

OP. Koliko nam je poznato, za sljedeće vektorske prostore X su vrijednosti singularnih dimenzija $\text{s-dim}\, X$ i $\overline{\text{s-dim}}\, X$ općenito nepoznate:

- za BMO prostore
- za Morreyeve prostore
- za Campanatove prostore
- za Orliczeve prostore
- za Lorentzove prostore

i mnoge druge.

Ako je X takav da je $\text{s-dim}\, X < \overline{\text{s-dim}}\, X$, onda je prirodno pitati se postoje li proširenomaksimalno singularne funkcije u X, kojima se dostiže $\overline{\text{s-dim}}\, X$.

Kompleksne dimenzije grafa Weierstrassove funkcije

Weierstrassova funkcija $W : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cos(2\pi b^n x),$$

gdje su $\lambda > 1$ i $b > \lambda$ zadani unaprijed.

Kompleksne dimenzije grafa Weierstrassove funkcije

Weierstrassova funkcija $W : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cos(2\pi b^n x),$$

gdje su $\lambda > 1$ i $b > \lambda$ zadani unaprijed.
Već je odavno poznata box-dimenzija grafa $G(W)$ funkcije W:

$$\dim_B G(W) = 2 - \log_b \lambda$$

Tek 2018. je dokazana Mandelbrotova slutnja (Shen):

$$\dim_H G(W) = 2 - \log_b \lambda$$

Kompleksne dimenzije grafa Weierstrassove funkcije

Weierstrassova funkcija $W : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \cos(2\pi b^n x),$$

gdje su $\lambda > 1$ i $b > \lambda$ zadani unaprijed.
Već je odavno poznata box-dimenzija grafa $G(W)$ funkcije W:

$$\dim_B G(W) = 2 - \log_b \lambda$$

Tek 2018. je dokazana Mandelbrotova slutnja (Shen):

$$\dim_H G(W) = 2 - \log_b \lambda$$

David i Lapidus su 2022. dokazali da uz dodatni uvjet $b \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\dim_{PC} G(W) = (2 - \log_b \lambda) + \frac{2\pi}{\ln b} \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

Polovi su reda 1 i skup $G(W)$ je nedegeneriran.

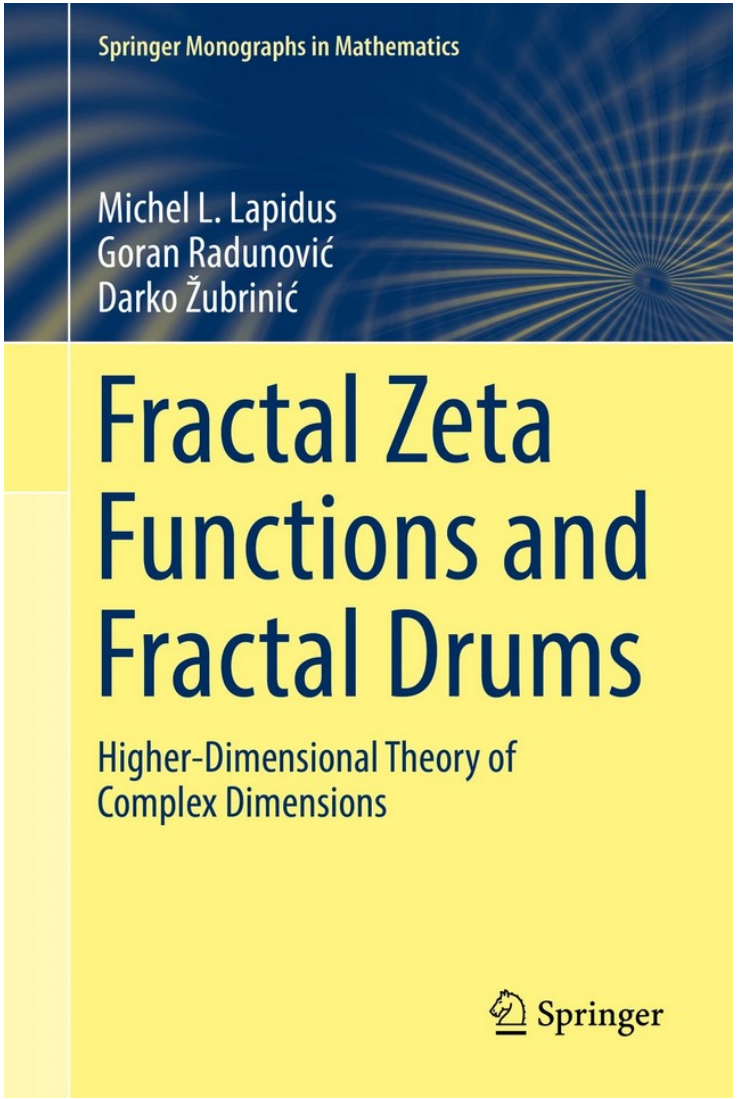
Reference (2002-2017.)

- D.Ž.: Singular sets of Sobolev functions, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I., Math, Analyse mathématique* 334 (2002), 539–544.
- L. Horvat, D.Ž.: Maximally singular weak solutions of Laplace equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 304 (2005), no. 2, 531–541.
- D.Ž.: Analysis of Minkowski contents of fratal sets and applications, *Real analysis Exchange* No. 2, 31 (2005/2006), 315–354.
- D.Ž.: Maximally singular functions in Besov spaces, *Archiv der Mathematik* (Basel), 87, (2006), 154–162.
- M. L. Lapidus, G. Radunović i D.Ž.: Complex dimensions of fractals and meromorphic extensions of fractal zeta functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 453 (2017), no. 1, 458–484.

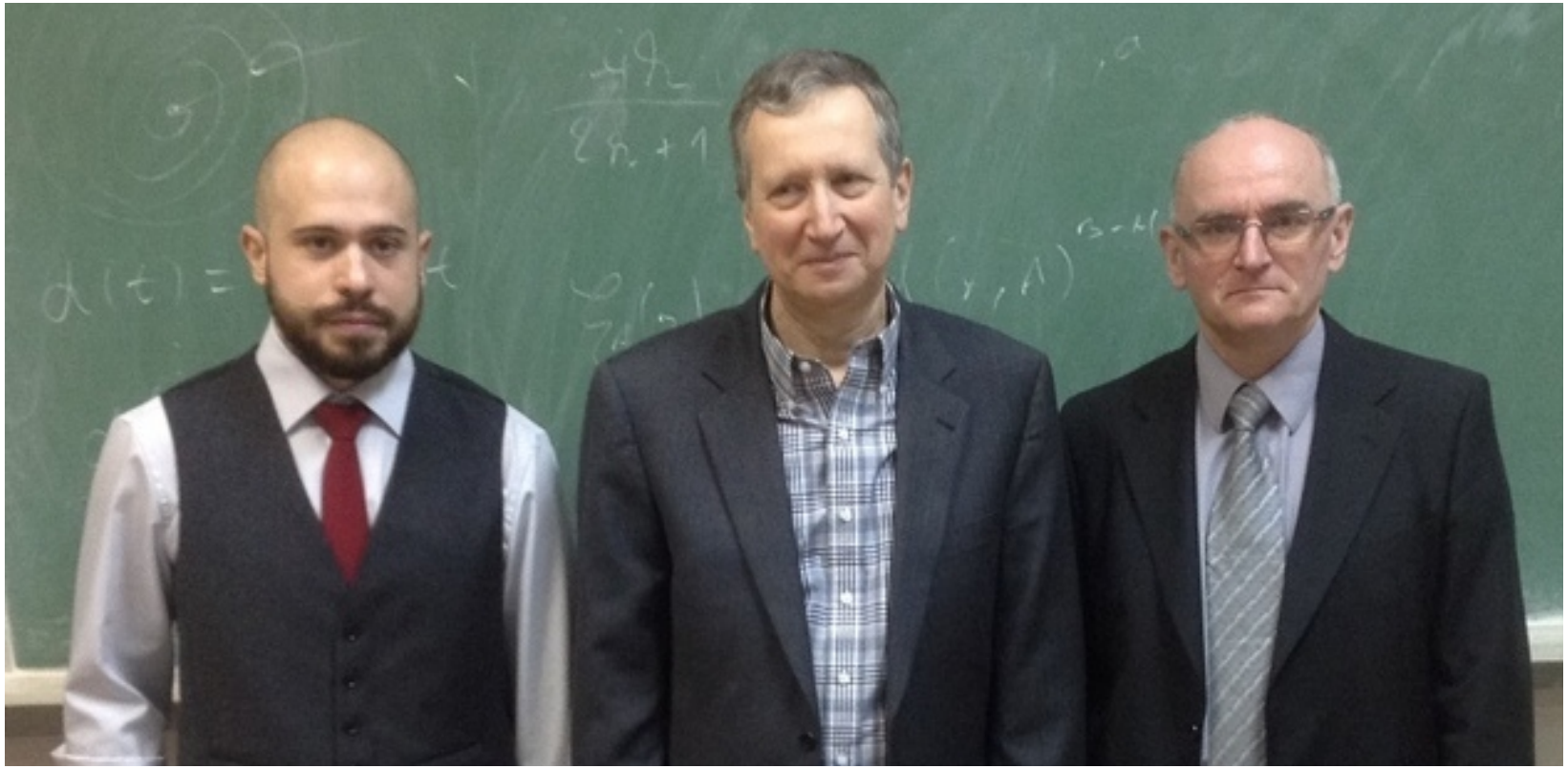
Reference (2017.-2021.)

- M. L. Lapidus, G. Radunović i D.Ž.: Distance and tube zeta functions of fractals and arbitrary compact sets, *Adv. Math.*, 307 (2017), 1215–1267.
- M. L. Lapidus, G. Radunović i D.Ž.: Minkowski measurability criteria for compact sets and relative fractal drums in Euclidean spaces, Fractals Dyn. Math. Sci. Arts Theory Appl., 5, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ*, 2020, 21–98.
- M. L. Lapidus, G. Radunović i D.Ž.: Essential singularities of fractal zeta functions, *Pure Appl. Funct. Anal.*, 5 (2020), no. 5, 1073–1094.
- J.-P. Milišić, D.Ž.: Maximally singular weak solutions of Laplace equations, *Rocky Mountain J. Math.*, 51 (2021), no. 6, 2147–2157.

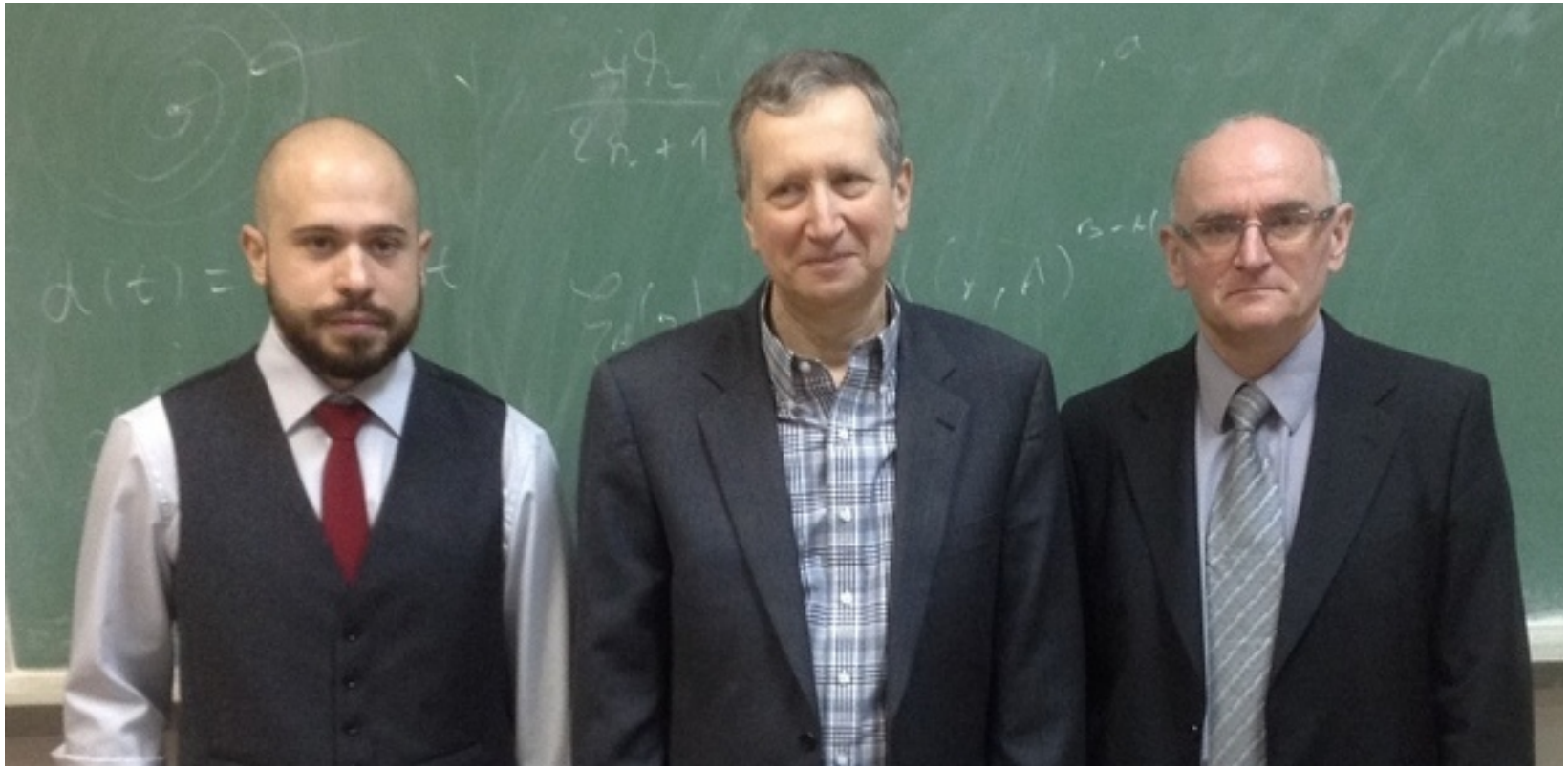
Springerova monografija, 2017.



Slika: Knjiga je nastala tijekom osam godina zajedničkog rada, u razdoblju od 2009. do 2017. Ima xl + 655 str., 6 poglavlja, 52 ilustracije, od toga 7 u boji.



Slika: Goran Radunović, Michel L. Lapidus (University of California, Riverside, Fellow of the AMS), D.Ž., na Zavodu za primijenjenu matematiku Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, 2015., neposredno nakon obrane doktorske disertacije G. Radunovića.



Slika: Goran Radunović, Michel L. Lapidus (University of California, Riverside, Fellow of the AMS), D.Ž., na Zavodu za primijenjenu matematiku Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, 2015., neposredno nakon obrane doktorske disertacije G. Radunovića.

Hvala na pozornosti!