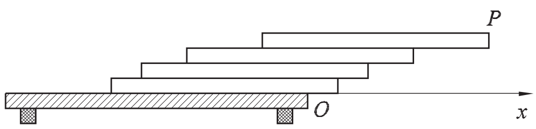
Statika stupca domina i harmonijski brojevi

Željko Hanjš, Zagreb

Dano je n domino–pločica duljine 2 cm mase 2 g, čije su visine, a i širine, jako male (možemo uzeti da su jednake nuli), koje stavljamo jednu na drugu uz rub stola. Jasno je da tih n domina, jedno po jedno, možemo gurnuti preko stola u desno, u smjeru x-osi, tako da se sve zajedno ne sruše sa stola (vidi sl. 1). Promatrajmo projekciju P desnog ruba najvišeg (n-tog) domina na x-os. Želimo odgovoriti na ovo pitanje:

Kolika je najveća moguća udaljenost od točke P do desnog ruba stola (tj. do točke O), u ovisnosti o broju n domina?



Slika 1.

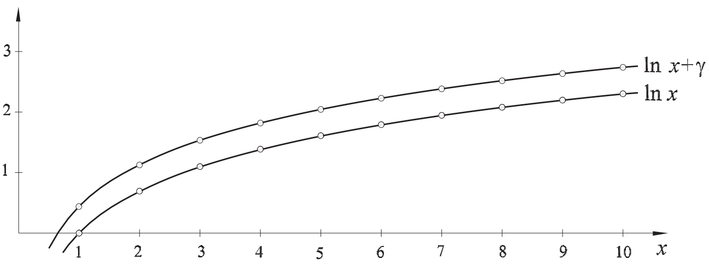
Tom udaljenošću, zapravo, mjerimo koliko se najdalje može "gurnuti" stupac domina na desnu stranu (preko ruba stola), a da se ne sruši. Matematičkom indukcijom dokazat ćemo da ta najveća moguća udaljenost iznosi točno

$$d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\,. \tag{1}$$

Ovaj zadatak potječe od *Sharpa* iz 1954. godine, a u sebi sadrži matematiku i fiziku (statiku). Može se pogledati u knjizi [1], str. 273., a i u udžbeniku za studente [2], str. 137, gdje je dan jedan dokaz relacije (1). Ovdje će biti dano drugo rješenje koje zahtijeva samo znanje matematike i fizike iz srednje škole.

O tzv. harmonijskim brojevima d_n u (1) možete čitati u članku [3], str. 6–11. Kao što je tamo pokazano, ako uzmemo makar kako veliki broj $M > 0$, uvijek postoji n takav da je $d_n > M$. (U tom slučaju kažemo da brojevi d_n teže u beskonačnost kada n raste, ili kraće zapisano: $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.)

Niz d_n teži u beskonačnost strahovito sporo, samo logaritamskom brzinom ($d_{n+1} \approx \ln n + \gamma$, $\gamma = 0.57721\ldots =$ konst., [2], str. 135).



Slika 2.

Npr., stupac od milijun domina poslaganih okomito uz rub stola možemo pomaknuti samo malo više od sedmerostruke duljine domina. Naime vrijedi $d_n \approx 14.39$.

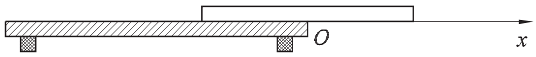
Vratimo se sada na dokaz tvrdnje (1).

Ako imamo dvije mase m' i m'' na x-osi, čije koordinate težišta su x' i x'' tada je masa ovog sistema jednaka $m = m' + m''$, a koordinata težišta je

$$x_T = \frac{m'x' + m''x''}{m' + m''}.$$

Slika 3.

Koristimo koordinatni sustav na pravcu, kojem je ishodište na rubu stola (kao na sl. 1). Ako imamo samo jednu pločicu, maksimalna udaljenost desnog ruba pločice od stola je $d_1 = 1$, jer težište mora biti najviše do ruba stola.



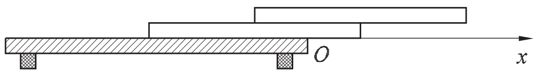
Slika 4.

Ako imamo dvije pločice, postavimo ih ovako: donju pločicu stavimo na stol na udaljenost $\frac{1}{2}$ od ruba stola, a drugu postavimo tako da joj težište bude uz desni rub donje pločice, tj. da joj polovište bude uz desni rub donje pločice. Težište donje pločice će biti u položaju $x_2' = -\frac{1}{2}$, a gornje $x_2'' = \frac{1}{2}$. Kako su mase pločica $m_2' = m_2'' = 2$, koordinata težišta ovih stepenica će biti

$$x_{T_2} = \frac{m_2'x_2' + m_2''x_2''}{m_2' + m_2''} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}}{4} = 0.$$

To znači da će stepenice biti stabilne i udaljenost njezinog desnog ruba će biti

$$d_2 = 1 + \frac{1}{2}.$$



Slika 5.

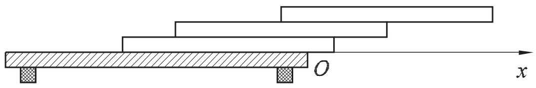
Pomicanjem bilo koje pločice udesno narušava se stabilnost stepenica.

Kada imamo tri pločice, postavimo ih ovako: donju pločicu stavimo na stol tako da njezina udaljenost od ruba stola bude $\frac{1}{3}$, i da težište dvije stepenice iz prethodnog slučaja bude na vertikali uz desni rub donje pločice. Koordinata težišta donje pločice će biti $x_3' = -1 + \frac{1}{3}$, njezina masa je $m_3' = 2$, a gornje dvije stepenice, čija masa je $m_3'' = 4$, a koordinata njihovog težišta je $x_3'' = \frac{1}{3}$. Sada će koordinata težišta novih stepenica, od tri stepenice, biti

$$x_{T_3} = \frac{m_3' x_3' + m_3'' x_3''}{m_3' + m_3''} = \frac{2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{3}\right) + 4 \cdot \frac{1}{3}}{6} = 0.$$

Dakle, stepenice će i dalje biti stabilne a udaljenost njezinog desnog ruba od stola je

$$d_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$



Slika 6.

Pretpostavimo da je u $(n-1)$-om koraku postavljena $n-1$ pločica, tako da je rub krajnje desne udaljen za 1 od desnog ruba druge pločice; desni rub druge pločice udaljen je za $\frac{1}{2}$ od desnog ruba treće pločice; desni rub treće pločice udaljen je za $\frac{1}{3}$ od desnog ruba četvrte pločice; $\ldots$; desni rub $(n-1)$. pločice udaljen je za $\frac{1}{n-1}$ od ruba stola, a težište stepenica je iznad ruba stola. Težina ovih stepenica je $m_n'' = 2(n-1)$. Podmetnimo sada još jednu pločicu koja će biti od ruba stola izvučena za $\frac{1}{n}$, čija je masa $m_n' = 2$. Koordinata njezinog težišta će biti $x_n' = -1 + \frac{1}{n}$, a prethodne stepenice izvučene tako da joj težište bude iznad desnog ruba donje stepenice. Tada je položaj težišta cijelog stepeništa, od n stepenica,

$$x_{T_n} = \frac{m_n' x_n' + m_n'' x_n''}{m_n' + m_n''} = \frac{2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{n}\right) + 2(n-1) \cdot \frac{1}{n}}{2n} = 0.$$

To znači da su stepenice stabilne, a maksimalna udaljenost desnog ruba je

$$d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ako bismo imali dovoljno mnogo pločica, udaljenost stepenica bi također bila proizvoljno velika.

Literatura

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison – Wesley, 1995.

[2] D. Žubrinić, *Diskretna matematika*, Element, 2001.

[3] D. Žubrinić, *Harmonijski brojevi*, Matematičko-fizički list **LII**, 2001./02.