MATEMATIKA

Harmonijski brojevi

Darko Žubrinić,[*] Zagreb

Beskonačno!
Niti koje drugo pitanje nije nikada toliko duboko dirnulo duh čovjeka.
— David Hilbert (1862. – 1943.)

Uvod

U ovom članku opisat ćemo jedan pomalo mističan slijed brojeva, koji na neočekivan način povezuje konačno s beskonačnim. Za njegovo razumijevanje dovoljno je da čitatelj znade što su to logaritamska i eksponencijalna funkcija. Dobar dio članka dostupan je i učenicima viših razreda osnovnih škola.

Harmonijski brojevi su racionalni brojevi koji se dobivaju na vrlo jednostavan način:

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots$$

Općenito, n-ti harmonijski broj H_n se za zadani prirodni broj n definira kao zbroj recipročnih vrijednosti svih prirodnih brojeva od 1 do n:

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Npr., $H_1 = 1$, $H_2 = \frac{3}{2}$, $H_3 = \frac{11}{6}$, $H_4 = \frac{25}{12}$, $H_5 = \frac{137}{60}$, $H_6 = \frac{49}{20}$, $H_7 = \frac{363}{140}$ itd. Naziv harmonijskog broja potječe iz glazbene teorije. Naime, ton valne duljine $\frac{1}{n}$ zove se *n-ti harmonik* tona čija je valna duljina 1. Harmonijski broj H_n je zbroj prvih n harmonika.

Harmonijski brojevi pojavljuju se u matematičkoj analizi kod proučavanja tzv. redova (tj. zbrojeva s beskonačno mnogo pribrojnika), kao i u proučavanju složenosti raznih algoritama. Vidjet ćemo jednu iznenađujuću primjenu harmonijskih brojeva koja spada (vjerojatno) u fiziku.

Cilj nam je opisati neka od temeljnih svojstava beskonačnog slijeda brojeva H_1, H_2, H_3, ... Označavat ćemo ga kraće jednostavno s (H_n). Jasno je da je slijed (H_n) rastući, tj. $H_n < H_{n+1}$, jer se H_{n+1} dobiva iz H_n dodavanjem pozitivanog broja $\frac{1}{n+1}$.

Brzina rasta harmonijskog slijeda

Prvo pitanje na koje želimo odgovoriti jest je li taj rastući slijed odozgo omeđen, tj. postoji li neki pozitivan broj $C > 0$ takav da za sve n vrijedi $H_n \leqslant C$? Pokazat ćemo da takav C ne postoji, tj. slijed (H_n) je odozgo neomeđen. Ta se činjenica često kraće zapisuje kao

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\infty, \tag{1}$$

gdje je ∞ oznaka za "beskonačno". Točnije, za svaki realan broj C, koliko god velik, postoji n takav da je $H_n > C$. Riječima, zbroj slijeda recipročnih vrijednosti svih

[*] Autor radi na Fakultetu elektrotehnike i računarstva, Zagreb, Unska 3, e-mail: darko.zubrinic@fer.hr, http:/www.hr/darko/mat/matlink.html

prirodnih brojeva je beskonačan. Ta je činjenica bila poznata već u 17. stoljeću, a znao ju je dokazati švicarski matematičar Jakob Bernoulli.

Da bismo pokazali tu tvrdnju, uzmimo neki dosta veliki n, i grupirajmo njegove pribrojnike u grupe od po 2 pribrojnika, zatim 4, 8, itd., sve dok je to moguće:

$$H_n = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{\text{1. grupa}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{\text{2. grupa}} +$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}\right)}_{\text{3. grupa}} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Primijetimo da je u prvoj grupi svaki pribrojnik $> \frac{1}{4}$, dakle $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. U drugoj grupi je svaki pribrojnik $> \frac{1}{8}$, dakle $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Zatim $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$. Na isti način vidimo da je i svaka daljnja grupa $> \frac{1}{2}$. Prema tome, ako H_n sadrži k grupa, onda je očevidno $H_n > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$. Pretpostavljamo da je $n \geqslant 3$, tako da imamo bar jednu grupu.

Za bilo koji zadani prirodan broj k, koliko god velik bio, možemo lako pronaći n tako da H_n sadrži k grupa (dovoljno je uzeti npr. $n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k$ ili više). Na taj način vidimo da za takav n vrijedi $H_n > 1 + \frac{1}{2} \cdot k$. Prema tome harmonijski slijed (H_n) je doista odozgo neomeđen, jer k može biti koliko god velik. Time je dokazana i jednakost u (1).

Sada bismo htjeli odgovoriti na teže pitanje: kojom brzinom slijed harmonijskih brojeva raste u beskonačnost? To nam daje naslutiti izravan račun: npr. $H_{20} \approx 3.60$, dok je $H_{220} \approx 5.98$. To znači da u H_{220} pripadajući zbroj posljednjih 200 članova ima manju vrijednost nego zbroj samo prvih 20. Isto tako, $H_{20\,220} \approx 10.49$, tj. zbroj posljednjih 20 000 članova u $H_{20\,220}$ je manji nego zbroj samo prvih 220. Ovaj primjer pokazuje da harmonijski slijed (H_n) raste vrlo sporo u beskonačnost u ovisnosti o n.

Da bismo dobili točniju informaciju o brzini kojom slijed harmonijskih brojeva teži u beskonačnost, iskoristit ćemo postupak opisan gore. Najprije, neka je n zadan prirodan broj, i dovedimo ga u vezu s najvećim mogućim brojem k pripadnih grupa u H_n.

Neka je stoga k najveći prirodan broj za koji je $n \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2^k$. Da bismo izračunali zadnji zbroj, rabimo malu inačicu znamenitog Gaussovog trika (Gauss ga je otkrio kad mu je bilo samo devet godina): za $s = 1+2+\ldots+2^k$ je $2s = 2+\ldots+2^k+2^{k+1}$, pa oduzimanjem dobivamo nakon skraćivanja $s = 2s - s = 2^{k+1} - 1$. Iz $n \geqslant 2^{k+1} - 1$ slijedi $k \leqslant \log_2(n+1) - 1$. Već smo vidjeli da je

$$H_n > 1 + \frac{1}{2} \cdot k.$$

Kako gornja nejednakost vrijedi za sve cijele brojeve $k \leqslant \log_2(n+1) - 1$, onda ona vrijedi i za najveću moguću vrijednost $k_0 = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor - 1$, tj.

$$H_n > \frac{1}{2}(1 + \lfloor \log_2(n+1) \rfloor). \tag{2}$$

gdje smo s $\lfloor x \rfloor$ označili najveći cijeli dio (ili najveće cijelo) od x, tj. $\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x. Time smo pokazali da harmonijski brojevi rastu **barem logaritamskom brzinom**. Pod time mislimo da postoje pozitivne konstante A i $B \in \mathbf{R}$, takve da je $H_n \geqslant A \log_2 n - B$. Očevidno možemo uzeti $A = 1/2$ i $B = 0$ (primijeti da je $\lfloor x \rfloor \geqslant x - 1$).

Nije teško uvjeriti se na sličan način da slijed harmonijskih brojeva ne raste brže nego logaritamska funkcija. Doista, neka je zadan n, i odaberimo za k najmanji prirodni broj za koji je $n \leqslant 1 + 2 + \ldots + 2^k$. Onda je $k \geqslant \log_2(n+1) - 1$. Svaki član prve grupe u H_n je $\leqslant \frac{1}{2}$, za drugu grupu je svaki član $\leqslant \frac{1}{4}$ itd. Na taj način dobivamo

$$H_n < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + k$$

Uzevši za k najmanju moguću vrijednost, tj. $k_0 = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor - 1$, dobivamo da je

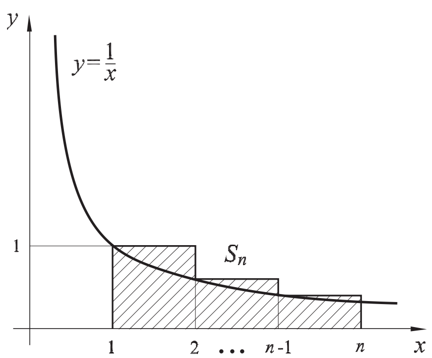
$$H_n < \lfloor \log_2(n+1) \rfloor, \tag{3}$$

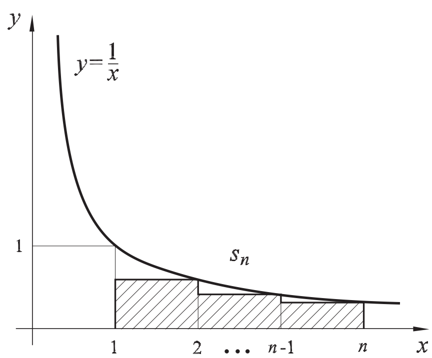
tj. brzina rasta harmonijskog slijeda nije veća od logaritamske. Spojimo nejednakosti (2) i (3) u jednu:

$$\frac{1}{2}(\lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1) < H_n < \lfloor \log_2(n+1) \rfloor. \tag{4}$$

Vidimo da je širina ovog intervala za H_n, $n \geqslant 3$, jednaka $\frac{1}{2}(\lfloor \log_2(n+1) \rfloor - 1)$, tj. postaje velika za velike n. Pažljivijom analizom može se međutim dobiti precizniji rezultat, s još užim intervalom, čija širina je jednaka samo $1 - 1/n$ (dakle manja od 1):

$$\ln n + \frac{1}{n} < H_n < \ln n + 1. \tag{5}$$





To je vrlo lako zaključiti znajući da je površina ispod hiperbole $y = 1/x$ na intervalu $[1, c]$ jednaka točno $\ln c$ za bilo koji $c > 1$. Posljednja činjenica uopće nije očevidna. Ona se dokazuje uz pomoć tzv. integralnog računa.

Ako tu činjenicu prihvatimo bez dokaza, onda lijeva nejednakost u (5) slijedi odmah iz činjenice da je površina ispod hiperbole na lijevoj slici između 1 i n manja od zbroja površina n pravokutnika od kojih je svaki širine 1, tj. $\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} = H_n - \frac{1}{n}$. S druge strane je zbroj površina pravokutnika na intervalu $[1, n]$ na desnoj slici manji od površine ispod hiperbole na istom intervalu, dakle $\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < \ln n$, tj. $H_n - 1 < \ln n$. Time je dokazana i desna nejednakost u (5).

Na taj način smo pokazali da razlika $H_n - \ln n$ poprima vrijednosti iz intervala $(0, 1)$. Vrijedi zapravo još više od toga. Razlika $H_n - \ln n$ se za velike n sve više približava jednoj konstanti γ, koja se zove **Eulerova konstanta**. Vrijednost Eulerove konstante je $\gamma = 0.5772156649\ldots$

Pišemo kraće da $H_n - \ln n \to \gamma$ kada $n \to \infty$. Još učeniji način pisanja te interesantne i iznenađujuće činjenice je s pomoću limesa: $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma$.

Ovo svojstvo harmonijskih brojeva je Euler otkrio još u 18. stoljeću, i za njegov dokaz treba nešto matematičke analize, u što se ovdje nećemo upuštati, vidi npr. [1], [2] ili [3]. Interesantno je da za misteriozan Eulerov broj γ još niti dan-danas nije poznato je li racionalan broj ili nije. Svi vjeruju da je taj broj iracionalan, ali to još nitko nije dokazao. Vjeruje se da je Eulerov broj ne samo iracionalan, nego čak i transcendentan, tj. ne postoji polinom s cjelobrojnim koeficijentim čiji bi on bio korijen. Takvi su npr. $\pi = 3.14159\ldots$ i $e = 2.71828\ldots$.

Moguće je i daljnje profinjenje ocjene (5) vrijednosti harmonijskog broja:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon_n}{120n^4},$$

pri čemu je $0 < \varepsilon_n < 1$. Dokaz nije jednostavan, vidi [2]. Iz te ocjene dobivamo da je

$$H_n \approx \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}, \tag{6}$$

pri čemu je pogreška ove aproksimacije broja H_n desnom stranom manja od $\frac{1}{120n^4}$, što je vrlo mali broj. Kažemo da je u (5) desnom stranom harmonijski broj H_n aproksimiran čak s točnošću četvrtog stupnja u ovisnosti o n. Ta nam formula omogućuje da vrlo točno izračunamo npr. milijunti harmonijski broj:

$$H_{1\,000\,000} \approx 14.392726722,$$

a da ne izračunavamo zbroj od svih milijun razlomaka $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1\,000\,000}$. I sve znamenke su točne. Pogreška koju pri tom radimo, uz uvjet da desnu stranu od (6) računamo na dovoljno velik broj decimala, bit će manja od $\frac{1}{120\cdot(10^6)^4} < 10^{-26}$, tj. imat ćemo točan rezultat na 25 decimala. To je doista vrlo velika točnost.

Kao što smo vidjeli, harmonijski brojevi H_n vrlo sporo rastu, i to samo logaritamskom brzinom u ovisnosti o n. Funkcija $\ln x$ vrlo sporo raste za velike x. Može se pokazati da ako na njenom grafu odaberemo neku točku s koordinatama (x_0, y_0), gdje je $y_0 = \ln x_0$, i povučemo **tangentu na graf** kroz tu točku, onda je koeficijent smjera tangente jednak točno $1/x_0$. Dokaz te nevjerojatne činjenice može se naći u bilo kojoj knjizi koja se bavi tzv. diferencijalnim računom. Npr. za $x_0 = 10$ koeficijent smjera tangente povučene na logaritamsku funkciju je 0.1, a za $x_0 = 1000$ samo 0.001, tj. tangenta je skoro vodoravna. To pokazuje da logaritamska funkcija raste užasno sporo već za relativno male x.

Nije na odmet da pokažemo kako je znameniti Švicarac Leonhard Euler iz 18. st., jedan od najvećih matematičara u povijesti, dokazao da je slijed (H_n) odozgo neomeđen, tj. teži u beskonačno kada n postaje sve veći i veći. Euler je dokazao da za logaritamsku funkciju vrijedi sljedeća krasna jednakost za sve $x \in (-1, 1]$ (dobiva se metodama diferencijalnog računa, i ovdje to navodimo bez dokaza):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \tag{7}$$

Evo kako sada Euler zaključuje. Kad se x približava vrijednosti -1, lijeva strana jednakosti postaje blizu $\ln 0$, tj. $-\infty$, a desna strana postaje blizu $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ldots$. Prema tome dobivamo da je $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty$. Kratak dokaz, zar ne? Mnogo kraći nego onaj s grupiranjem. Ipak, dokaz neomeđenosti harmonijskog slijeda s pomoću grupiranja je bolji, jer je elementarniji, a može ga u cjelosti razumijeti i učenik sedmog razreda osnovne škole (uz pretpostavku da zna zbrajati razlomke).

Usput, nije loše napisati još jednu doista nevjerojatnu jednakost, koju dobivamo jednostavno uvrštavanjem $x = 1$ u (7):

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Spomenimo bez dokaza još neka svojstva harmonijskih brojeva. Prvo, H_n nikada nije prirodan broj. Nadalje, pokazuje se da za sve $x \in [0, 1)$ vrijedi

$$\frac{1}{1-x} \cdot \ln \frac{1}{1-x} = H_1 x + H_2 x^2 + H_3 x^3 + \dots$$

To je tzv. **funkcija izvodnica** slijeda harmonijskih brojeva (H_n), koju je otkrio također Euler.

Ovdje smo više puta spomenuli ime znamenitog matematičara *Leonharda Eulera* (1707.–1783.). S obzirom na njegov veliki značaj i u današnjoj suvremenoj matematici, nije čudno da se njegov lik nalazi na švicarskim novčanicama. Na njemačkim novčanicama se iz istog razloga nalazi lik *C. F. Gaussa* (1777.–1855.).

Crvić na gumenoj traci

Pogledajmo ovaj neobičan problem, koji su opisali Graham, Knuth i Patashnik u [2] na str. 274. Zamislimo da imamo vodoravnu gumenu traku duljine jedan metar, na čijem se jednom kraju nalazi mali crvić. Uporni crvić grabi prema drugom kraju, tako da puzi brzinom od jedan centimetar u minuti. Međutim, traku pažljivo nadgleda čuvar, čija jedina briga u životu jest da uznemiruje crva, i to tako da mu na kraju svake minute rastegne gumu za jedan metar. Znači, nakon jedne minute puzanja crv C je odpuzao 1 cm, i udaljen je 99 cm od kraja. Zatim čovjek Č rastegne gumu za jedan metar. Crv zadržava svoj relativni položaj na gumi, tj. 1% udaljenosti od početka i 99% od kraja. Prema tome, sada je udaljen 2 cm od početka, i 198 cm od kraja gume. Nakon sljedeće minute crv je prešao ukupno 3 cm i preostaje mu još 197 cm do kraja. Međutim Č opet rastegne gumu za jedan metar, pa odgovarajuće udaljenosti postaju 4.5 cm. i 295.5 cm. Nastavljajući na isti način dalje, postavlja se pitanje hoće li crv ikada doći do kraja gume? Guma se rasteže brzinom od 1 m nakon svake minute, a crv juri brzinom od jedan centimetar na minutu, plus onaj dobitak u njegovu pomaku kod svakog rastezanja gume. Naravno, pretpostavljamo da C i Č žive beskonačno dugo, te da se guma može jednoliko rastezati, kao i to da crvić C ima zanemarivo male dimenzije.

Svaki put kada Č produži gumu, njezin dio koji crv C prijeđe ostaje isti. Nakon što Č prvi put rastegne gumu, crv je prešao $1/100$ gume, nakon sljedeće minute crv C prijeđe $1/200$ (rastegnute) gume, nakon treće minute $1/300$ duljine ponovno rastegnute gume itd. Prema tome, nakon n minuta dio od n puta rastegnute gume (duljine n m) koji prijeđe naš crv C iznosi

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \dots + \frac{1}{n \cdot 100} = \frac{1}{100} \cdot H_n.$$

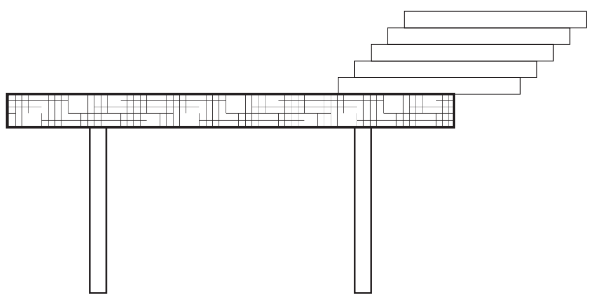
Budući da H_n teži u beskonačnost kada n postaje beskonačno velik, vidimo da će za dovoljno veliki n broj H_n biti veći od 100, tj. $\frac{1}{100} \cdot H_n > 1$. Za takve n će crv doista već dostići kraj gume.

Koliko mu treba vremena da dođe do kraja gume? Znamo da će nejednakost $H_n > 100$ biti ispunjena tek za fantastično veliki n. Pokušajmo ga naći barem otprilike uz pomoć približne jednakosti (6), koja je gotovo točna jednakost s obzirom da je n vrlo velik, a pogreška manja od $\frac{1}{120n^4}$. Znači treba riješiti nejednakost $\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} > 100$

s najmanjim mogućim n. Dovoljno je naći najmanji n takav da je $\gamma + \ln n > 100$, jer će razlomci $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{12n^2}$ biti blizu nule. Znači dovoljno je uzeti n tako velik da bude $\ln n > 100$, tj. $n > e^{100}$. Taj broj je veći od fantastičnog velikog broja $2 \cdot 10^{43}$. Pretvaranjem minuta u godine, dobivamo više od 10^{37} godina. Naš crvić C dopuzao bi do kraja gume... kroz daleko dulje vrijeme nego što je starost svemira (fizičari tvrde da starost svemira iznosi 15 do 20 milijardi godina). Međutim, što je to prema vremenskoj beskonačnosti? Gotovo ništa. Kao treptaj oka ...

A sada zamislimo jednog super-crva koji prijeđe čak pola metra u minuti umjesto samo jednog centimetra. On će do kraja rastezljive gume doći mnogo prije. Doista, naš super-crv SC će nakon n minuta prijeći $\frac{1}{2}H_n$-ti dio duljine gume. On će dostići kraj gume kad bude $\frac{1}{2}H_n > 1$, tj. $H_n > 2$. Lako se vidi da je $H_3 = \frac{11}{6}$, $H_4 = \frac{25}{12}$, pa je rješenje $n = 4$, tj. za 4 minute super-crv će već prijeći kraj gume. Možete se sami uvjeriti da će SC doći do kraja gume nakon 3 minute i 40 sekundi.

U jednom od sljedećih brojeva MFL-a pokazat ćemo doista nevjerojatno zanimljivo fizikalno svojstvo špila od n karata istih duljina, položenog do samog ruba stola. Pokazat ćemo da karte u špilu možemo postaviti po volji daleko preko ruba stola, a da se špil ne sruši. Uvjet je, naravno, da imamo dovoljno mnogo karata. Npr., želimo li špil karata gurnuti preko ruba stola za sedmerostruku duljinu jedne karte preko ruba stola, tako da se špil ne sruši, dovoljno nam je milijun karata. Zamislite taj špil! Diže se u nebesa! Naravno, moramo pretpostaviti da nema niti daška vjetra... Karte treba uz tu pretpostavku vrlo, vrlo oprezno, u savršenoj tišini, pomicati preko ruba stola tako da se špil ne sruši. Vidjet će se da je to u vezi s harmonijskim brojevima, i činjenicom da je $H_{1\,000\,000} \approx 14.39$.



Na stranama MFL-a nerijetko se nude članci iz fizike koji su doista previše zahtjevni (barem za autora ovog članka). Poštovanom čitaocu obećajem da će cijela gore spomenuta fizikalna "teorija" biti opisana u nekom od budućih MFL-ova krajnje elementarno, bez ikakvih integrala, bez vektorskih polja, i bez i jedne diferencijalne jednadžbe.

Literatura

[1] W. Dunham, *Euler, The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, 1999.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison Wesley Publishing Company, 1995.

[3] Darko Žubrinić: *Diskretna matematika*, Element, Zagreb 2001.